GEOMETRIA DOS FRACTAIS E SUA INSERÇÃO NOS MEIOS FÍSICOS NATURAIS

Jeferson Feitoza Vitorio[1]
Aislan Silva Primo[2]

Matemática
cadernos de graduação
ciências exatas e tecnológicas
ISSN IMPRESSO 1980-1777
ISSN ELETRÔNICO 2316-3135

RESUMO

O presente artigo apresenta o estudo dos fractais como ferramenta de percepção as superfíciesnaturais a quaissão descritas por eles oque a remete aoestudo da Geometria Fractal e trazendo novas possibilidades de pesquisa e inserção dos conhecimentos científicos e geométricos aprimorando o conhecimento e trazendouma nova visão de formas e figuras geométricas particionadas. A inserção da geometria dos fractaisnamecânica, nabiologia e na área da saúdetambém é perceptível onde poderemos encontrar váriasestruturas de fractais que permitemumconhecimento e umestudocomumembasamentocientificomais apurado em determinados casos as quais se inserem. Alémdisso, o conhecimento de formas fractais, técnicas e métodos de montagem de figuras tambémsãopossíveis vez que a geometria fractal assim como as outrasgeometrias é regida por propriedade, normas, métodos e técnicas de estudo. A natureza por sua vez é o mundo dos fractais onde as superfícies irregulares e os menores detalhes de determinados objetos, seres e fenômenosnaturaisassumem formas fractais e portamseusmais diversos tipos de figuras.

PALAVRAS-CHAVE

Geometria Fractal. Geometria Euclidiana. Inserção. Formas irregulares. Conjunto de Mandelbrot:

ABSTRACT

This paper presents the study of fractals as a tool of perceptionthe natural surfaces to which they describe which refers to the study of Fractal Geometry and bringing new possibilities for research and insertion of scientific and geometric knowledge, improving knowledge and bringing a new vision. of partitioned geometric shapes and figures. The insertion of fractal geometry in mechanics, biology and health is also notice able where we can find various fractal structures that allow a better knowledge and stud ywith a scientific basis in certain cases to which they belong. In addition, knowledge of fractal shapes, techniques and methods of assembling figures is also possible since fractal geometry as well as other geometries is governed by property, norms, methods and study techniques. Nature, in turn, is the world of fractals where the irregular surfaces and the smallest details of certain objects, beings and natural phenomena take on fractal forms and carry their most diverse types of figures.

KEYWORDS

Fractal Geometry. Euclidean Geometry. Insertion. Irregular Shapes. Mandelbrot Set.

1 INTRODUÇÃO

Grosso modo, temos que a geometria é um ramo da matemática que estuda as formas. Também, sendo um grande mecanismo para o desenvolvimento da humanidade ao longo dos anos. Por meio dela podemos observar vários fenômenos comportamentais e eventos que ocorrem ao longo dos séculos.

A Geometria é uma das mais antigas manifestações matemáticas conhecida pelo homem. No Egito à cerca de 3000 a.C. já era de conhecimento de estudiosos conhecimentos de Geometria necessários para reconstituir marcações de terrenos degradados pós as enchentes do rio Nilo, também para construção das célebres pirâmides onde algumas delas ainda são estudadas pelo rigor matemático e pela perfeição nos pontos arquitetônicos.

Por volta do ano 500 a.C., na Grécia, havia um grande desenvolvimento no interesse pela matemática e vários sábios se dedicaram ao estudo da Geometria. Um dos mais importantes e conhecidos sábios que foi Tales de Mileto, usou propriedades geométricas para determinar a distância sobre a superfície terrestre.

Euclides de Alexandria, foi o mais conhecido dos geómetras de todos os tempos. Euclides trabalhou toda a geometria conhecida na sua época e lançou um trabalho denominado “Elementos”, composto por 13 livros. Ele define termos como: pontos, linhas, planos, mas não aborda outras definições tais como: comprimento, distância ou declive que são pontos primordiais trabalhados nas mais diversas geometrias atuais.

Só cerca do ano de 1600 o matemático francês René Descartes introduziu uma verdadeira inovação na Geometria: descobriu que havia uma relação estreita entre as figuras geométricas e certos cálculos numéricos – Geometria Cartesiana – que é algébrica, embora se conheça por Geometria Analítica. Assim, foi possível resolver facilmente, por meio do cálculo, problemas que eram muito difíceis à luz da geometria. É o método inventado por Descartes que permite, por exemplo, que um computador represente imagens e lhes dê movimento (ZÚNIGA, 2011).

Ao longo dos anos apareceram várias formas de estudos geométricos que são denominados "Geometrias Não Euclidianas". Essas geometrias foram estudadas por diversos matemáticos como Riemann que contribuiu para a ampliação dos conhecimentos geométricos com seu estudo de curvas e superfícies esféricas.

Outros estudos tiveram grande contribuição nesse sentindo, como por exemplo, os estudos de Cálculo Infinitesimais, curvas Geodésicas, Cálculo diferencial na geometria entre outros. Desse modo, surgem algumas geometrias não euclidianas com grande relevância e interpretações para os matemáticos. Temos nesse aspecto a Geometria Diferencial, Geometria Riemanniana, Geometria Esférica e Geometria Fractal a qual abordaremos ao longo deste trabalho.

A Geometria Fractal contribui para o aprimoramento científico no estudo de comportamentos e descrições naturais onde é abordado um amplo e vasto leque de conteúdos multidisciplinares e de grande contribuição para o entendimento dos processos físicos de formação e comportamento da natureza. A matemática aplicada está diretamente ligada a várias pesquisas já realizadas nesse campo de estudo científico. Tomando por partida os modelos matemáticos presentes na natureza é possível fazer uso e adaptações dos próprios para um bom estudo nas mais diversas áreas pesquisadas.

> A Geometria Euclidiana se propõe a estudar formas regulares que quase sempre são feitas pelo homem, já a Geometria Fractal estuda padrões regulares e organizados dentro de uma aparente irregularidade, muito encontradas na natureza. Num universo despovoado de formas geométricas perfeitas, onde proliferam superfícies irregulares, difíceis de representar e medir, a Geometria Fractal apresenta-se como um meio de tratar aqueles fenômenos até agora considerados imprevisíveis, aleatórios e anômalos, ou seja, caóticos. (FUZZO; REZENDE; SANTOS, 2009, p. 11).

Esse tema é discutido por pesquisadores, matemáticos e geômetras que buscam a assimilação e compreensão nos estudos da natureza com geometria não euclidiana a exemplo Nunes (2006) e Carvalho (2005). Nunes (2006, p. 1) define o tema como "A geometria fractal permite a integração de diversos temas da matemática e de outras áreas, desde as ciências naturais as econômico-sociais e à tecnologia". Já Carvalho (2005, p. 15) em seu texto intitulado "GEOMETRIA FRACTAL: Perspectivas e possibilidade para o ensino de Matemática" destaca que "Talvez o maior mérito da Geometria Fractal seja este: o de representar melhor as formas da natureza – as mesmas que a geometria euclidiana considera como desvio de padrão".

Segundo Carvalho (2006, p. 7):

> A geometria fractal permite a integração de diversos temas da matemática e de outras áreas, desde as ciências naturais às econômico-sociais e à tecnologia. Quando incluída no ensino, permite desenvolver o espírito experimental dos alunos de forma a entender a geometria de objetos não tradicionais e de estabelecer modelos matemáticos para auxiliar os estudos dos fenômenos naturais.

1.1 OBJETIVOS

Com os avanços que cercam a geometria faz-se necessário que os estudos e pesquisas sobre ela e seus diversos ramos tenham maior aprimoramento, pois o desenvolver da geometria acarreta uma série de avanços tecnológicos e teóricos em várias áreas do conhecimento. Levando em consideração aspectos naturais que não são descritos com as formas de geometria convencional ou "Euclidiana" é trazido a Geometria Fractal ou Geometria dos Fractais como ferramenta de exploração para novos saberes e conhecimentos, resolução de problemas que não são convencionais da geometria clássica.

Desse modo, torna-se necessário um embasamento do que vem a ser a Geometria não Euclidiana, além disso, uma introdução e embasamento acerca do estudo dos fractais para uma melhor compreensão do que vem a ser a geometria que o tem como aspecto central. Mostrando como os fractais estão presentes nos mais diversos e simples locais do cotidiano e da vivência do ser humano.

Neste trabalho abordaremos um modelo de matemática dissolvido na natureza onde é cabido o estudo da geometria fractal como ferramenta de análise de formas e superfícies naturais encontradas na natureza e até mesmo em fatores biológicos.

2 O QUE SÃO FRACTAIS

Os fractais são figuras geométricas que podem ser divididos em partes. Os fractais possuem infinitos detalhes e em diversos casos o fractal pode ser gerado por um padrão repetitivo.

Mandelbrot foi um matemático franco-americano que descreveu a classe de objetos matemáticos, a qual denominamos como geometria fractal na década de 1970 e a figura mais conhecida de fractal é denominada Conjunto de Mandelbrot.

> O conjunto de Mandelbrot é um mapeamento do comportamento de divergência da sequência associada na qual não vamos entrar em detalhes. No caso do estudo do comportamento das equações diferenciais, costuma aparecer também o conjunto denominado de "chãos" na qual não apresenta propriedades de auto similaridade, o que complica mais ainda o seu estudo. (MASSAGO, 2010, p. 7).

O conjunto de Mandelbrot é definido como o conjunto de pontos c no plano complexo. Para cada ponto c nesse plano, a sequência cresce como:

$$
\begin{aligned}
&c = x + iy \\
&Z_0 = 0 \\
Z_1 &= Z_0^2 + c \\
&= x + iy \\
Z_2 &= Z_1^2 + c \\
&= (x+iy)^2 + x + iy \\
&= x^2 + 2ixy - y^2 + x + iy \\
&= x^2 - y^2 + x + (2xy + y)i \\
&Z_3 = Z_2^2 + c = \ldots
\end{aligned}
$$

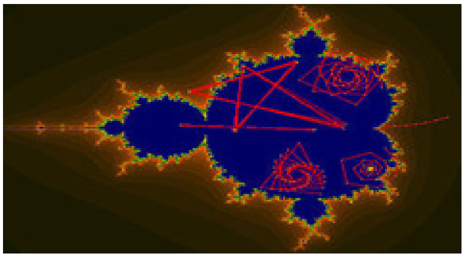
Temos, reescrevendo a sequência acima, em termos das partes real e imaginária (coordenadas x e y do plano complexo), a cada iteração n, substituindo z_n pelo ponto $x_n + y_n i$ e c pelo ponto $a + bi$,:

$$x_{n+1} = {x_n}^2 - {y_n}^2 + a$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b$$

O conjunto de Mandelbrot, em sua representação gráfica, pode ser dividido em um conjunto infinito de figuras pretas, sendo a maior delas um cardióides, centralizado do plano complexo. Existe uncontaveis de quase-círculos (o maior deles é a única figura que, de fato, é um círculo exato e localiza-se à esquerda do cardióide) que tangenciam o cardióide e variam de tamanho com raio, tendendo assintoticamente a zero (WIKIPÉDIA, 2020).

Ilustração 1 – conjunto de Mandelbrot

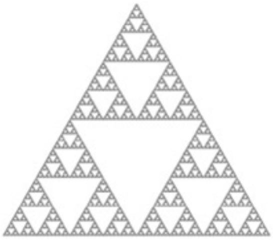


Fonte: Wikipédia (2020).

A ideia por trás do conjunto fractal é a "auto similaridade", ou seja, as partes do fractal é uma miniatura de todo seu conjunto. O triângulo de Sierpinski é um fractal formado pelas três cópias do triângulo em menor escala, cada encontrado em um canto do triângulo original. O conjunto é auto similar quando particionamos o fractal e percebemos que as partes possuem exatamente o mesmo formato que a figura originária.

A construção do Triangulo de Sierpinski parte de uma superfície delimitada por um triângulo equilátero totalmente preenchido no plano, sobre o qual aplicamos sistemas repetitivos de operações. Marcam-se os pontos médios de cada um dos três segmentos que se delimitam o triângulo, obtendo-se um novo triângulo central de vértices nos pontos médios do triângulo maior; ligam-se esses três pontos médios e obtemos quatro triângulos congruentes, cujo lado é a metade do lado do triângulo original e a área é 1/4 da área deste triângulo; retira-se o triângulo central, ficando 3 novos triângulos eqiiláteros; repetem-se indefinidamente os três últimos passos com os triângulos restantes.

Ilustração 2 – Triangulo de Sierpinski



Fonte: Wikimedia[1].

Exceto nos casos de fractais exatamente autossimilares, não é simples de obter a dimensão fractal. Para obtermos um valor aproximado, fazemos uso do processo que chamamos de "Processo de Contagem de Caixas", para este processo, inicialmente, desenhamos um retângulo, contendo o conjunto fractal, que o conjunto toque cada um dos lados. Subdividimos cada lado do retângulo em k partes iguais, obtendo retângulos semelhantes, seja nk, o número de retângulos que interceptam o conjunto X e calculamos dk = ln nk

ln k. Quando o conjunto satisfaz certas condições, podemos provar que d = lim

k!1 dk onde d é a dimensão fractal.

O conjunto fractal aparece tanto no estudo dos problemas matemáticos, como nos problemas relacionados aos estudos na natureza. A natureza tem infinitas formas de fractais e a estrutura recursiva, podendo manter a dimensão fractal até uma escala considerável. Os exemplos mais comuns são: costas e rios, superfícies dos planetas e corpos celestes, fraturas, árvores e outras plantas, veias, texturas do solo, entre outros. Para a realização da análise de tais objetos, costumamos calcular a dimensão fractal e no caso de reconstrução, tentar determinar o Sistema Interativo de Fuções (IFS) aproximado. Além disso, podemos encontrar os fractais em diversos tipos de emissão de sinais.

3 GEOMETRIA DOS FRACTAIS

A Geometria Fractal muitas vezes está presente no nosso cotidiano e passa despercebida pela falta de conhecimento,

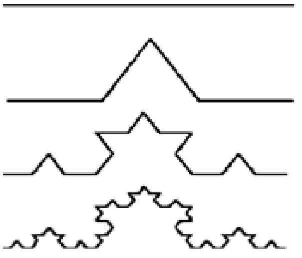
1 Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b7/SierpinskiTriangle.PNG/220px-SierpinskiTriangle.PNG. Acesso em: 19/06/2020

> esse tema pode ser trabalhada de forma interdisciplinar com as disciplinas de Ciências Naturais, Matemática, Artes, Geografia e Biologia. Com isso, pode-se demonstrar que a matemática está presente no mundo das pessoas e não somente nos livros didáticos. (DAGA; CASTILHO, 2017, p. 4).

Hodiernamente, vivemos um avanço científico e tecnológico, o qual permite um grande avanço e desenvolvimento nos conceitos geométricos, entre esses avanços podemos observar que pouco a pouco a geometria dos fractais vem se tornando conhecida e cada vez mais explorada. Conforme os *softwares* que possuem um enfoque em geometria são originados com maiores recursos tecnológicos, torna-se, mais acessível a compreensão de pontos da geometria dos fractais já que um computador tende a resolver em questões de minutos ou horas, problemas que levariam dias ou até anos parecerem solucionados a mão por matemáticos.

Um dos *softwares* mais utilizados é o *UltraFractal* que consegue criar fractais com uma grande precisão e riqueza de detalhes nas suas formas e partes. O *software* Geogebra é de domínio público e é bastante utilizados para as construções de alguns fractais como a curva de Koch e a ilha de Koch.

Ilustração 3 – Curva de Koch

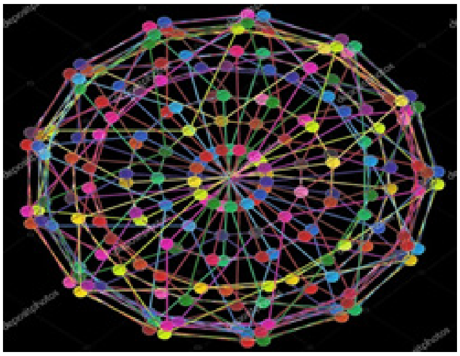


Fonte: GOOGLE-imagens[2].

Por um grande espaço de tempo foram trabalhados vários problemas da natureza com a Geometria Euclidiana. Porém, essa geometria não atende a todos os problemas da natureza e ainda deixa muitas questões em aberto no que tange a algumas resoluções de aspectos naturais, como a estrutura e representação de montanhas, batimentos cardíacos, flocos de neve e formas moleculares entre outras coisas. "As nuvens não são esferas, montanhas não são cones, as costas não são círculos e casca não é suave, nem relâmpago viaja em linha reta" (MANDELBROT,1977, p. 14). segundo Mandelbrot essas formas são tão complexas que não tem possibilidade de serem descritas com Geometria Euclidiana.

2 Disponível em: https://www.researchgate.net/figure/Figura-8-Curva-de-Koch-Primeiras-iteracoes-Fonte-GOOGLE-imagens_fig3_321953638. Acesso em: 16/06/2020

Ilustração 4 – Estrutura de rede do DNA molécula Fractal. Conceito conexão DNA sequência, isolado no fundo preto



Fonte: Fotografia por NesaCera[3]

A ilustração 1.4 mostra características irregulares da geometria. Essas características irregulares na geometria, antes do surgimento do estudo da geometria fractal não tinham soluções e eram denominadas: "monstros da matemática".

> Um objeto pode ser classificado como um fractal se possuir essas características: Auto semelhança, complexidade e dimensão. Eles podem ser encontrados na natureza como no floco de neve, relâmpagos, brócolis romanesco e na concha marinha. E também podem ser obtidos geometricamente ou aleatoriamente por processos repetitivos como, por exemplo: A curva de Koch, a ilha de Koch etc. (DAGA; CASTILHO, 2017, p. 8).

4 ÁREAS DE INSERÇÃO AOS FRACTAIS

A geometria dos fractais tem como função, abordar e estudar a complexidade das interações e formas espaciais, fornecendo uma rigorosa abordagem para embasar a mensuração, a análise e a representação quantitativa e geométrica no espaço real. Os poros presentes no solo e as delimitações de espaço são assimilações da irregularidade do solo e dos elementos e formas espaciais, por meio de uma ampla igualdade capaz de associar estes elementos a sua forma, em uma linguagem geometricamente conhecida.

Em algumas ciências que estudam o espaço, como ciências, solo é seu objeto central de pesquisa, a geometria fractal tem sido inserida no que tange à representação das formas, tamanhos da distribuição espacial das partículas e dos espaços porosos do solo.

Quando estudamos as ciências do solo os fractais são utilizados para descrição do percurso de infiltração e redistribuição e direcionamento da água, também, modela

3 Disponível em: https://pt.depositphotos.com/191215154/stock-photo-dna-molecule-fractal-network-structure.html. Acesso em: 16/06/2020

de forma eficiente e precisa a ocorrência de fenômenos durante esses processos, vez que o solo está em um espaço tridimensional. A dimensão fractal pode ser determinada com alguns atributos físicos do solo, permitindo estudos com novos métodos de abordagem e que são fundamentadas em parâmetros físicos, passando a ocupar o espaço de estudos, utilizando-se parâmetros puramente empíricos (HOTT *et al.*, 2005).

> A aplicação do conceito da Geometria Fractal já vem sendo explorada pela economia na busca de encontrar padrões sobre o comportamento das bolsas de valores, na tecnologia a construção de antenas na forma de fractais, onde, estas são capazes de captar várias faixas de frequência. Na Medicina podemos encontrar a estrutura de alguns órgãos que seguem a Geometria Fractal tais como: A estrutura dos pulmões e as ramificações dos neurônios. Em estudos recentes mostram que a compreensão da Geometria Fractal pode ajudar no diagnóstico de câncer, uma vez que um órgão cancerígeno irá apresentar uma dimensão fractal diferente da encontrada em um órgão sadio. No ramo da Biologia podemos encontrar várias formas que seguem os padrões da Geometria Fractal como: as ramificações das árvores, as estruturas do couve-flor, do brócolis e a reprodução de coelhos. (DAGA; CASTILHO, 2017, p. 15).

Um dos ramos mais importantes da ciência dos materiais é a Mecânica da Fratura Clássica (MFC). Tratando da formação e propagação de trincas e superfícies de determinada fratura. A geometria euclidiana vem formulando sua modelagem matemática, considerando apenas a área da fratura. Por serem áreas irregulares as superfícies de fraturas, também, são tratadas pela geometria dos fractais, pois, têm maior precisão para com as formas irregulares, promovem uma descrição fiel ao fenômeno e contorna as falhas existentes no método quando aplicada apenas a geometria euclidiana.

Com a inserção do fractal nas formas rugosas de superfícies, torna-se possível, do ponto de vista teórico, o entendimento com maior êxito da dissipação de energia de uma fratura. A rugosidade pode ser uma interação da microestrutura do material.

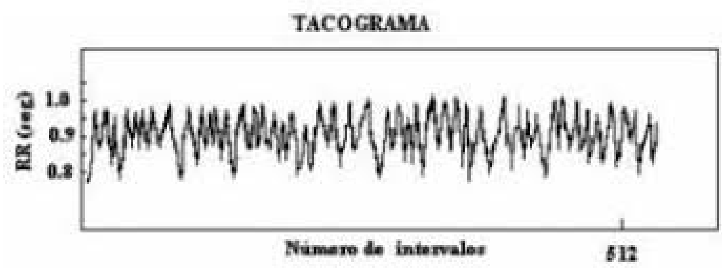
A natureza é fractal quando levamos em conta que tudo é fractuoso e não são formadas superfícies lineares e retas. Os vasos sanguíneos são grandes exemplos de fractais naturais, onde um ramo dos vasos gera mais dois que são geradores de mais quatro e assim por diante. Os brônquios do pulmão humano também têm seu comportamento fractal.

Quando o ser humano sofre por portar determinado tipo de doença ou anomalia é notória uma grande perda de sua estrutura fractal. Quando uma pessoa é diagnosticada com Hipertensão Arterial Pulmonar que grosso modo seria descrita como uma pressão alta nos vasos sanguíneos do pulmão, os fractais relacionados a descrição da estrutura dos vasos e ramificações sanguíneas sofrem redução e amputação de partes. Outro caso seria o aparecimento da Fibrose, doença que pode ser descrita como formação ou desenvolvimento de tecido conjuntivo em determinado órgão do corpo humano acarretando o desaparecimento da estrutura fractal do corpo humano na região a qual se fixa.

Há várias formas e métodos utilizados para a medição dos batimentos cardíacos a fim de seu controle e análise, o Tacograma é um gráfico que permite perceber o aumento e análise do controle desses batimentos. É possível quantizar o tanto de fractalidade que existe em cada tacograma; se o tacograma possui grande variabilidade a pessoa é tida como saudável, mas se existe um baixo índice de variabilidade na fractalidade ou uma sequência linear, existe um diagnostico de anomalia ou problema no coração.

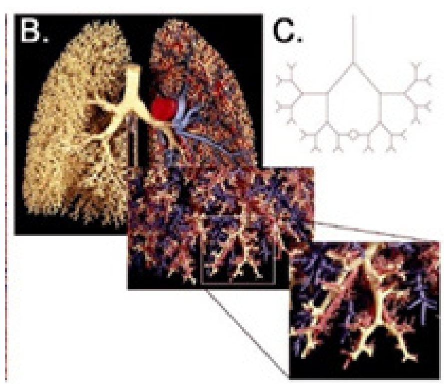
> A aplicação do conceito da Geometria Fractal já vem sendo explorada pela economia na busca de encontrar padrões sobre o comportamento das bolsas de valores, na tecnologia a construção de antenas na forma de fractais, onde, estas são capazes de captar várias faixas de frequência. Na Medicina podemos encontrar a estrutura de alguns órgãos que seguem a Geometria Fractal tais como: A estrutura dos pulmões e as ramificações dos neurônios.

Ilustração 5 – Tacograma



Fonte: Jugo e outros autores (2008 apud SILVA JUNIOR, 2019).

Ilustração 6 – Alterada de vasos pulmonares



Fonte: Glenny (2010 apud NEVES, 2014).

5 CONCLUSÃO

A Geometria Euclidiana nos arremete a fazer estudos e aplicações com formas regulares de geometria caracterizadas pelo próprio homem, já a Geometria Fractal traz uma complexidade de padrões regulares particionados que são encontrados de forma geral em aparelhos naturais por sua vez não regulares. Sendo conhecido que o universo é repleto em sua maior parcela de formas irregulares ou anômalas é difícil encontrar soluções para problemas existentes que fogem da geometria euclidiana com a própria geometria, então os fractais tendem a ser mais uma ferramenta matemática que ajuda na exploração, conhecimento e estudo cientificam, colaborando para o desenvolto da ciência como um todo nas mais diversas áreas existentes.

> Como podemos notar a Geometria Fractal está presente no nosso cotidiano e a maioria das vezes passou despercebidos por causa da falta de informação. Em um dia chuvoso quando olhamos para o céu vemos aquelas ramificações que os raios fazem; quando vamos ao supermercado é compramos um couve-flor, estamos diante de objetos fractais. Com isso, a importância do estudo da Geometria Fractal. (DAGA; CASTILHO, 2017, p. 16).

O desenvolvimento nas ramificações geométricas no que tange aos fractais pode trazer grande influência para o diagnostico de exames, uma vez que várias doenças podem vir a ser detectadas por meio de alteração e variabilidade da fractalidade existente em determinada região em análise. Além disso, um amplo leque de inserção é aberto como a astronomia que insere os fractais para descrição de formas de corpos celestes e estruturação espacial, a geofísica, química, física e engenharia genética entre outras áreas. Desse modo, é irrefutável que os estudos, aprimoramentos e pesquisas sobre essa geometria seja de extrema importância para sociedade.

REFERÊNCIAS

ASSIS, Thiago Albuquerque; MIRANDA, Jose Garcia Vivas; MOTA, Fernando de Brito; ANDRADE, Roberto Fernandes Silva; CASTILHO, Caio Mario Castro. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física,** v. 30, n. 2, p. 2304, 2008.

CARVALHO, Hamilton Cunha. **Geometria fractal:** perspectivas e possibilidades no ensino da matemática. 2005. 101f. Dissertação (Mestrado em Educação e Ciências e Matemática) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém-PA, 2005.

DAGA, Marcelo da Silva; CASTILHO, Jose Eduardo. **Uma análise da geometria fractal.** 2017. 17f. Dissertação (Trabalho de conclusão de Curso em Ciências Naturais) – Faculdade UnB Platina Ciências Naturais; Platina, 2017.

FERREIRA, Alrineide de Melo; SILVA, Rosinângela Cavalcanti. Geometria relacionada ao cotidiano. **Revista de Pesquisa Interdisciplinar**, Cajazeiras, n. 2, suplementar, p. 490-495, set. de 2017.

FUZZO, Regis Alessandro; REZENDE, Veredina; SANTOS, Talita Secorun. Fractais: algumas características e propriedades. Encontro de produção Científica e Tecnológica, 4, 20 a 23 de outubro de 2009. **Anais [...].** Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão/Núcleo de Pesquisa Multidisciplinar, Campo Mourão-PR, 2009.

HOTT, M. C.; SOARES, V. P.; RIBEIRO. C. A. Á. S.; GRIFFITH, J. J. Análise fractal de textura usando um operador de Hurst em uma imagem TM/Landsat. Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, 12, 2005, Goiânia. **Anais [...].** Goiânia: INPE, 2005. p. 4089-4093.

MANDELBROT, Benoit B. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: W. H Freeman and Company, 1977.

MASSAGO, Sadao. Introdução ao fractal. Semana Acadêmica de Matemática, 7, 2010, Tocantins. **Anais [...].** Universidade Federal de Tocantins, Campus de Araguaína-TO, 2010.

NEVES, Hélia. O que tem o pulmão humano em comum com ... o leito de um rio, uma fortificação ou um cristal de gelo? **Cientistas descobriram que**, 3 de dezembro de 2014. Disponível em: https://cientistasdescobriramque.com/2014/12/03/o-que-tem-o-pulmao-humano-em-comum-com-o-leito-de-um-rio-uma-fortificacao-ou-um-cristal-de-gelo/. Acesso em: 12/06/2020

NOGUEIRA, Vandira Noiola. **Uso da geometria no cotidiano.** Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) da Secretária Estadual da Educação. Jataizinho-PR: Universidade do Estado do Norte do Paraná – UNEP, 2008.

NUNES, Raquel Sophia Rabelo. **Geometria fractal e aplicações.** 2006. 78f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006.

SILVA JUNIOR, Ruy Marra da. E**feitos da manobra respiratória por biofeedback na variabilidade da frequência cardíaca como estratégia para avaliação da violência urbana em atletas e não atletas residentes em áreas de vulnerabilidade**. 2019. 54f. Documento apresentado ao programa de pós-graduação stricto sensu em

Cardiologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), como requisito do exame de qualificação de mestrado, Rio de Janeiro, 2019.

ZÚNIGA, Larissa. A história da geometria. **Tudo matemática**, 10 de fevereiro de 2011. Disponível em: https://tudo-matematica.blogspot.com/2011/02/historia-da-geometria.html. Acesso em: 11 jan. 2020.

WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. **Conjunto de Mandelbrot**. 2020. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot. Acesso em: 2 jan. 2020.

Data do recebimento: 22 de fevereiro de 2020
Data da avaliação: 10 de junho de 2020
Data de aceite: 10 de junho de 2020

1 Acadêmico do curso de Matemática – UNIT; Membro da Liga Acadêmica de Matemática Pura e Aplicada – LAMPA. E-mail: jeferson.feitoza@souunit.com.br

2 Pós-Graduado em Matemática – UNIT; Professor Orientador da Liga Acadêmica de Matemática Pura e Aplicada – LAMPA. E-mail: aislanprimo14@gmail.com