

# ANÁLISE DE TENSÕES NORMAIS GERADAS POR CARREGAMENTO EXCÊNTRICO EM SEÇÃO RETANGULAR CONSTANTE COM USO DO EXCEL

Paulo Lucas Leite do Nascimento<sup>1</sup>

Jonas Rafael Duarte Cavalcante<sup>2</sup>

Diego Faro Alves<sup>3</sup>

Fábio de Carvalho Tenório Júnior<sup>4</sup>

Engenharia Civil



**cadernos de  
graduação**  
ciências exatas e tecnológicas

ISSN IMPRESSO 1980-1777

ISSN ELETRÔNICO 2316-3135

## RESUMO

A utilização de recursos de multimídia como auxílio no aprendizado de diversas disciplinas em vários cursos tem sido muito eficiente e está cada vez mais sendo empregada pelo mundo todo. Com base nisso, vários recursos computacionais têm sido desenvolvidos em diferentes *softwares*. Nesse contexto, o presente trabalho se trata da apresentação de uma pasta de trabalho desenvolvida no *software Microsoft Office Excel 2019* que auxilia no estudo de tensões normais provocadas por carregamento excêntrico em seção retangular constante à qual o utilizador precisa entrar com os dados em células específicas de acordo com cada problema – como dimensões, valor da carga e excentricidade da carga – e ela mostrará, automaticamente, os resultados das tensões nos vértices da seção. Desse modo, este trabalho apresenta o estudo para verificação de tensões normais causadas por carga excêntrica e mostra ao utilizador como inserir os dados na planilha e como interpretar os seus resultados.

## PALAVRAS-CHAVE

Tensões Normais. Flexão Normal Composta. Planilha para Estudo de Tensões.

## ABSTRACT

The use of multimedia resources as an aid in learning various disciplines in various courses has been very efficient and is increasingly being employed all over the world. Based on this, several computational features have been developed in different software. In this context, the present work is the presentation of a workbook developed in the Microsoft Office Excel 2019 software that assists in the study of normal stresses caused by eccentric loading in a constant rectangular section to which the user only needs to type in some cells of the worksheet some data that must be made available by the problems – such as dimensions, load value and load eccentricity – and it will automatically show the results of the stresses at the vertices of the section. Thus, this work presents the study to verify normal stresses caused by eccentric load and shows the user how to insert the data into the spreadsheet and how to interpret its results.

## KEYWORDS

Normal tensions; Composite normal flexion; Spreadsheet for tensions study.

## 1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos estudos a respeito da mecânica dos materiais, é de grande importância o estudo das flexões compostas. A flexão composta é uma combinação de carregamentos que incluem força normal e momentos fletores. Estes momentos fletores podem ser causados por um esforço excêntrico localizado na direção longitudinal do elemento e será esse o tipo de carregamento do qual o presente trabalho irá se basear. Tais elementos que sofrem o carregamento podem ser vigas, pilares, vigas protendidas, entre outros.

Quando uma força é aplicada paralela ao eixo longitudinal de um elemento fora do seu centro de gravidade, esta força deve ser transferida para o centroide junto aos momentos fletores causados por ela em torno dos eixos cartesianos. Consequente disto, podem ser geradas três tipos de tensões normais, sendo uma advinda da carga sobre a área e as outras duas dos momentos em torno dos eixos paralelos ao plano da área.

Segundo Hibbeler (2010), devemos considerar que o material é homogêneo e se comporta de um modo linear e elástico para que se possa realizar todas as análises necessárias.

Segundo Assis (2002, p. 2) “Várias experiências utilizando recursos de multimídia aplicados ao ensino de engenharia vêm sendo efetuadas tanto no Brasil como no exterior, obtendo-se de modo geral resultados bastante positivos”. A partir disso, pode-se dizer que o estudo por meio da utilização de recursos computacionais pode facilitar o aprendizado devido à interação e viabilidade de resolver problemas trabalhados cotidianamente.

Com o advento dos computadores e posterior desenvolvimento de sistemas de aquisição, a atividade de registro de dados sofreu profundas modificações, tornando-se possível automatizar a aquisição e o armazenamento dos dados. Com a contínua disponibilização de recursos computacionais com capacidade de processamento cada vez maior, a Engenharia de Estruturas passou a ter à disposição recursos para a elaboração de modelos matemáticos sofisticados. (ASSIS, 2007, p. 1).

Ao pensar na disciplina Resistência dos Materiais, dos cursos de Engenharias, é notório que problemas envolvendo carregamento excêntrico possuem, em sua maior parte, uma forma de resolução semelhante quando o intuito é verificar as tensões normais provocadas nos elementos que estão sendo estudados. Com base nas análises e deduções de equações feitas por renomados autores – como Beer, Hibbeler, Martha, entre outros – é possível a aplicação destes estudos numa planilha que necessita de poucas informações para que seja possível a verificação das tensões causadas por carregamento excêntrico num elemento de seção transversal retangular com base no princípio da superposição e no princípio de Saint-Venant.

Portanto, o presente trabalho tem como objetivo principal realizar estudos a respeito das tensões provocadas por carregamento excêntrico ao eixo longitudinal da seção transversal retangular de um elemento e introduzir e explicar uma planilha do *Microsoft Office Excel* desenvolvida pelos autores.

A escolha do *Excel* como aplicativo para criação da planilha se deu pela habilidade dos autores em manusear a ferramenta, além do mesmo possuir uma linguagem fácil e proporcionar resultados de forma gráfica para uma melhor visualização do usuário.

Com a definição do objetivo fundamental do trabalho, passa-se agora a explicar um pouco dos assuntos a serem tratados nos capítulos seguintes.

No capítulo dois, será tratada a definição de momento provocado por carregamento excêntrico, no qual serão feitas observações e análises para combinações dele.

No capítulo três, serão expostas premissas necessárias para que se possa simplificar considerações sobre tensões normais, onde o material homogêneo deve permanecer com sua seção plana antes e depois da aplicação da carga.

No capítulo quatro, será analisado o comportamento provocado pela tensão à flexão, ou seja, momento provocado pelo carregamento excêntrico, no qual é levado em consideração o momento de inércia do material.

No capítulo cinco, será definido o estado global de tensões pelo princípio da superposição, onde é explicitada a demonstração da distribuição das tensões no plano principal, sendo elas de tração e compressão.

No capítulo seis será abordada a metodologia para o desenvolvimento da planilha e nos capítulos seguintes serão realizados, analisados e comparados estudos de caso para que seja comprovada a eficiência da ferramenta.



### 3 TENSÃO NORMAL

Segundo Hibbeler (2010, p. 16), levando em consideração duas premissas simplificadoras as quais consideram que o elemento em estudo deve permanecer reto antes e depois da aplicação da carga; que não seja considerada as regiões do elemento próximo às suas extremidades; que  $P$  seja aplicada ao longo do eixo do centroide da seção transversal, para que a barra sofra deformação uniforme; e que o material seja homogêneo e isotrópico. Sendo os materiais homogêneos aqueles que possuem propriedades físicas e mecânicas idênticas e isotrópicos as matérias que possuem as mesmas propriedades em todas as direções. Com base nisso, reconhecendo que a tensão seja constante por toda a seção transversal, têm-se:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (\text{Equação})$$

Onde:

- $\sigma$  – Tensão normal;
- $P$  – É o valor da força axial interna resultante aplicada no centroide da seção transversal do elemento;
- $A$  – É o valor da área da seção transversal do elemento;

### 4 TENSÃO POR FLEXÃO

Com base nos estudos de Beer (2011) e Hibbeler (2010), considera-se que a tensão causada por um momento fletor pode ser distribuída conforme um plano inclinado em relação a área da seção transversal e seu valor pode ser determinado conforme a Equação 4.

$$\sigma = \frac{M \cdot c}{I} \quad (\text{Equação})$$

Onde:

- $\sigma$  – Tensão normal no elemento;
- $M$  – É o valor do momento interno resultante calculado em torno do eixo em análise da seção transversal;
- $c$  – É o valor da distância perpendicular ao eixo em análise a um ponto afastado deste eixo, onde a tensão age;
- $I$  – É o momento de inércia da área da seção transversal calculada em torno do eixo em análise.

É possível, levando em consideração que o momento fletor e o momento de inércia permanecem constantes em toda a seção transversal, determinar as tensões máximas causadas por este momento fletor, sendo estas determinadas por:

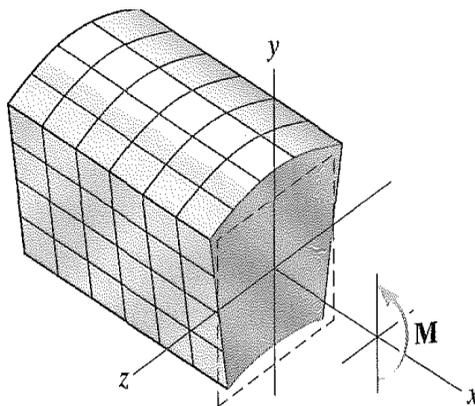
$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M \cdot c'}{I} \quad (\text{Equa\c{c}\~{a}o})$$

Onde:

- $c'$  é o valor da distância perpendicular ao eixo em análise ao ponto mais distante deste eixo, onde a tensão máxima atua.

A Equação 5 é derivada da lei de Hooke, que correlaciona " $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ", onde a deformação é negativa quando ocorre a compressão, pois tende a reduzir as fibras do material, e positiva caso as fibras sejam tracionadas, pois tende a alongar as fibras do material. Portanto, caso ocorra flexão positiva, as fibras acima da linha neutra (LN) do elemento são comprimidas e as fibras abaixo da LN são tracionadas, como exemplificado na Figura 2 abaixo.

**Figura 2** – Momento fletor positivo



Fonte: Hibbeler (2010, p. 203).

Além disso, para fins de cálculos, foi considerado que a distância positiva em relação ao plano cartesiano paralelo a seção transversal (plano dos eixos  $y$  e  $z$ ) (FIGURA 2) são distâncias que partem da origem em direção para direita e para cima. Logo, a equação para determinar as tensões por flexão é:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = -\frac{M \cdot c'}{I} \quad (\text{Equa\c{c}\~{a}o})$$

Onde os resultados obtidos por meio da Equação 6 que forem negativos são tensões de compressão e resultados positivos são tensões de tração.

Para este trabalho, serão estudados apenas elementos de seção transversal no formato retangular. Desta forma, com base na Equação 7 (equação do momento de inércia para seção retangular), pode-se determinar a equação de momento de inércia em relação aos eixos "y" e "z" da Figura 2.

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (\text{Equação})$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (\text{Equação})$$

$$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12} \quad (\text{Equação})$$

## 5 ESTADO GLOBAL DE TENSÕES PELO PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO

As tensões oriundas do carregamento P como mostrado na Figura 1, podem ser obtidas por superposição, porém, desde que seja satisfatória as condições do princípio. A tensão normal causada pelo carregamento demonstrado na Figura mencionada pode ser calculada pela Equação 3, e as tensões causadas pelos momentos em relação a seus respectivos eixos, sendo eles y e z, no qual suas condições podem ser positivas ou negativas, ou seja, tração ou compressão, resultado este obtido pela Equação 4.

O Princípio da Superposição então é demonstrado pela distribuição da tensão no plano principal no qual é analisado em pontos, a equação para tal análise assim é escrita:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \pm \frac{M_y \cdot z}{I_y} \pm \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad (\text{Equação})$$

## 6 METODOLOGIA PARA ELABORAÇÃO DA PLANILHA

Foi realizada uma pesquisa a respeito das consequências de um carregamento excêntrico ao eixo longitudinal de um elemento de seção transversal retangular e, a partir disso, foi produzida uma planilha no Excel que verifica e demonstra, de forma simplificada, as tensões normais e a distribuição destas tensões em toda a seção transversal do elemento.

Para o desenvolvimento da planilha, exercícios resolvidos foram tomados como base para o cálculo, tendo certos dados informados inicialmente e, utilizando-se das equações citadas anteriormente, os valores das tensões máximas nas extremidades

puderam ser obtidos e podem ser facilmente interpretados. Posteriormente, foi criada uma interpretação gráfica dos resultados obtidos com o intuito de demonstrar uma melhor visualização.

## 6 ESTUDOS DE CASO

### 6.1 ESTUDO DE CASO 1

**Figura 3** – Exemplo 4.9 resolvido do livro Mecânica dos Materiais

#### EXEMPLO 4.9

Uma força vertical de 4,80 kN é aplicada em um poste de madeira de seção transversal retangular de  $80 \times 120$  mm, conforme mostra a Fig. 4.71. (a) Determine as tensões nos pontos A, B, C e D. (b) Localize a linha neutra da seção transversal.

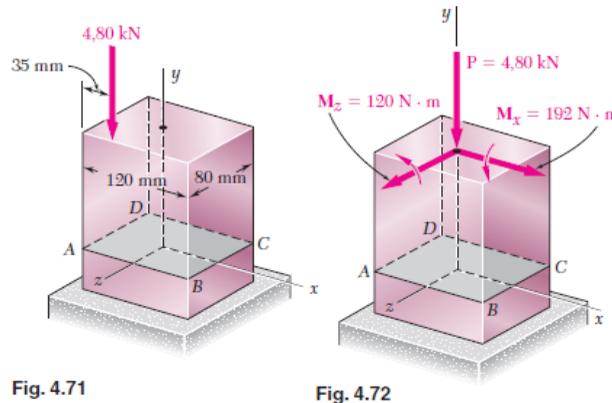


Fig. 4.71

Fig. 4.72

Fonte: Beer (2011, p. 297).

Pode-se, analisando as dimensões e a localização da força excêntrica  $P=4,80$  kN, substituí-la por um sistema equivalente a uma força centrada  $P$  no centro da seção transversal em conjunto com dois momentos  $M_x$  e  $M_z$ , como mostrado na Figura 3.

$$M_x = (4,8 \cdot 10^3 \text{ N}) \cdot (0,04 \text{ m}) = 192 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_z = (4,8 \cdot 10^3 \text{ N}) \cdot (0,06 \text{ m} - 0,035 \text{ m}) = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Faz-se necessário também calcular a área e os momentos de inércia da seção transversal, visto que não foi disponibilizado no enunciado.

$$A = (0,08 \text{ m}) \cdot (0,12 \text{ m}) = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{0,08^3 \cdot 0,12}{12} = 5,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,08 \cdot 0,12^3}{12} = 11,52 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Visto que a força  $P$  é negativa e uniforme ao longo da seção, a tensão causada por ela é encontrada no valor negativo.

$$\sigma_P = \frac{P}{A} = \frac{-4,8 \cdot 10^3 \text{ N}}{9,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} = -0,5 \text{ MPa}$$

Já as tensões causadas pelos momentos fletores são linearmente distribuídas ao longo da seção. Desse modo, calcula-se as tensões máximas causadas por eles.

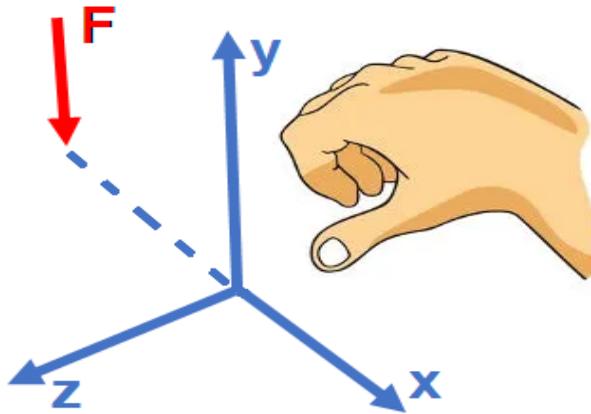
$$\sigma_{M_x} = \frac{M_x \cdot z_{máx}}{I_x} = \frac{(192 \text{ N} \cdot \text{m}) \cdot (0,04 \text{ m})}{5,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} = 1,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{M_z} = \frac{M_z \cdot x_{máx}}{I_z} = \frac{(120 \text{ N} \cdot \text{m}) \cdot (0,06 \text{ m})}{11,52 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4} = 0,625 \text{ MPa}$$

Em seguida, tem-se que as tensões nas extremidades da seção são dadas por:

$$\sigma_y = \sigma_P \pm \sigma_{M_x} \pm \sigma_{M_z}$$

**Figura 4** – Regra da mão direita para direção do momento fletor



Fonte: Autores (2021).

A Figura 4 exemplifica a regra da mão direita, onde se deve posicionar os quatro dedos se curvando e apontando para a mesma direção que a força está apontando e o dedão deve estar paralelo ao eixo de atuação. Logo, a Figura 4 gera um momento fletor em torno do eixo  $z$ , pois o dedão está apontando na mesma direção que ele. Além disso, a partir da regra, é possível determinar que, da origem até valores nega-

tivos de  $x$ , o resultado da tensão será de compressão e, da origem até valores positivos de  $x$ , o resultado será de tração. A partir desta regra, define-se o sinal de " $\pm$ " da equação.

Evidencia-se que a tensão é de compressão em toda área da seção transversal, a tensão  $\sigma_{M_x}$  é de compressão nos pontos A e B da Figura 3 e tração nos pontos C e D devido a direção e ao sentido do momento fletor  $M_x$  e que a tensão  $\sigma_{M_z}$  é de compressão nos pontos A e D e tração nos pontos B e C devido a direção e ao sentido do momento fletor  $M_z$ , obtêm-se:

$$\sigma_A = -0,5 - 1,5 - 0,625 = -2,625 \text{ MPa}$$

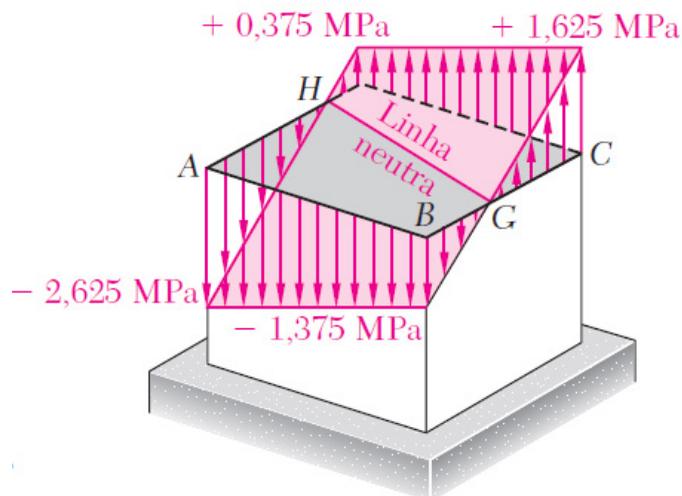
$$\sigma_B = -0,5 - 1,5 + 0,625 = -1,375 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -0,5 + 1,5 + 0,625 = +1,625 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -0,5 + 1,5 - 0,625 = +0,375 \text{ MPa}$$

Com base nestes resultados, a distribuição das tensões ao longo da seção transversal é mostrada na Figura 4.

**Figura 4** – Distribuição das tensões ao longo da seção transversal



Fonte: Beer (2011, p. 297).

## 7 APLICAÇÃO DA PLANILHA

### 7.1 ESTUDO DE CASO 01

Figura 5 – Interface da pasta de trabalho, planilha “início”



Participantes	Nome	Titulação	Instituição de Ensino Superior
Discente	Celiane Mendes da Silva	Graduanda em Engenharia Civil	Centro Universitário Tiradentes - AL
Discente	Fábio de Carvalho Tenório Júnior	Graduando em Engenharia Civil	Centro Universitário Tiradentes - AL
Discente	Paulo Lucas Leite do Nascimento	Graduando em Engenharia Civil	Centro Universitário Tiradentes - AL
Docente	Jonas Rafael Duarte Cavalcante	Mestre	Centro Universitário Tiradentes - AL

Fonte: Autores (2020).

Logo de início, o usuário se depara com a apresentação dos autores responsáveis pela criação e desenvolvimento da planilha junto ao docente orientador e deve clicar no botão “começar” para iniciar os cálculos de tensão causada por carregamento excêntrico.

Após clicar em “começar”, o utilizador é direcionado para a aba “dimensões”, onde deve digitar o valor das dimensões da seção transversal disponibilizadas no exercício (FIGURA 04) com unidades em metros.

Figura 6 – Interface da pasta de trabalho, planilha “dimensões”



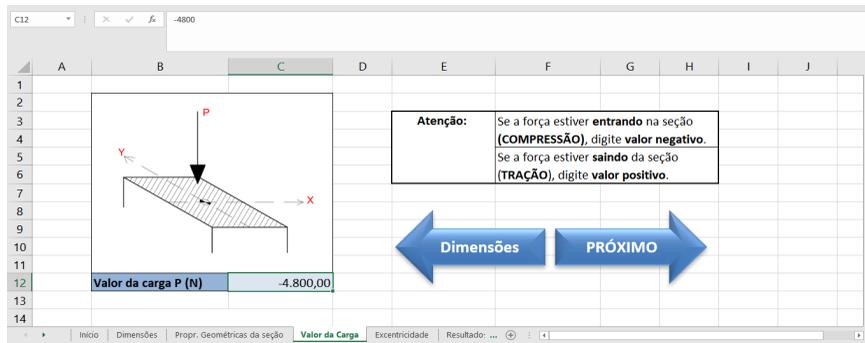
Dimensões:	
Base (m):	0,08
Altura (m):	0,12

Fonte: Autores (2020).

Em seguida, o usuário pode observar as propriedades geométricas da seção ou continuar para a flexão composta, clicando nos respectivos botões mostrados na Figura 6.

O passo a seguir, prosseguindo para flexão composta, é digitar o valor do carregamento com unidade de medida em Newtons, atentando-se ao aviso que pode ser observado na imagem 7.

**Figura 7** – Interface da pasta de trabalho, planilha “valor da carga”



Fonte: Autores (2020).

Logo após, clicando no botão “próximo”, o utilizador é direcionado para a planilha “excentricidade”, onde deve digitar a distância horizontal (em relação ao eixo x) e vertical (em relação ao eixo y) tendo como a origem sendo o centro da seção transversal.

**Figura 8** – Interface da pasta de trabalho, planilha “excentricidade”



Fonte: Autores (2020).

Após disponibilizar todas estas informações, as tensões são apresentadas no estado global e isoladamente na planilha “resultados”, como mostra-se na Figura 9, a seguir.

**Figura 9** – Interface da pasta de trabalho, planilha “resultados”



Fonte: Autores (2020).

Ao analisar a Figura 9, têm-se:

$$\sigma_A = -0,5 - 0,625 - 1,5 = -2,625 \text{ MPa}$$

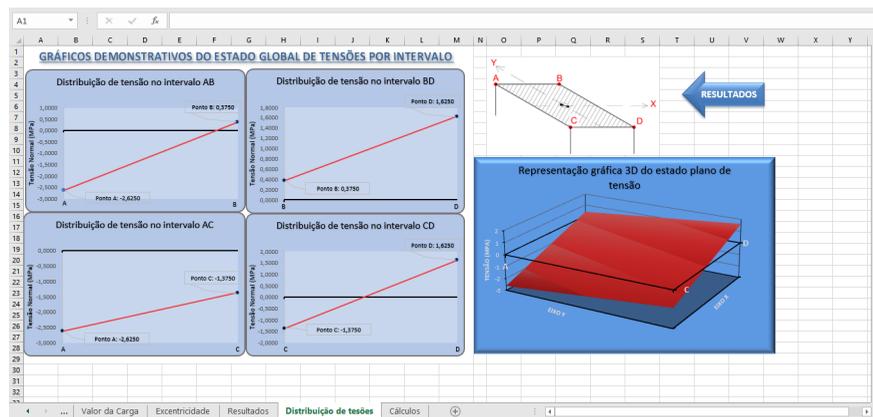
$$\sigma_B = -0,5 - 0,625 + 1,5 = +0,375 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -0,5 + 0,625 - 1,5 = -1,375 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -0,5 + 0,625 + 1,5 = +1,625 \text{ MPa}$$

Além disso, é possível analisar graficamente os resultados, clicando no botão “visualização gráfica dos resultados” para que se tenha uma melhor análise das tensões ao longo da seção com perspectiva em 2D e em 3D.

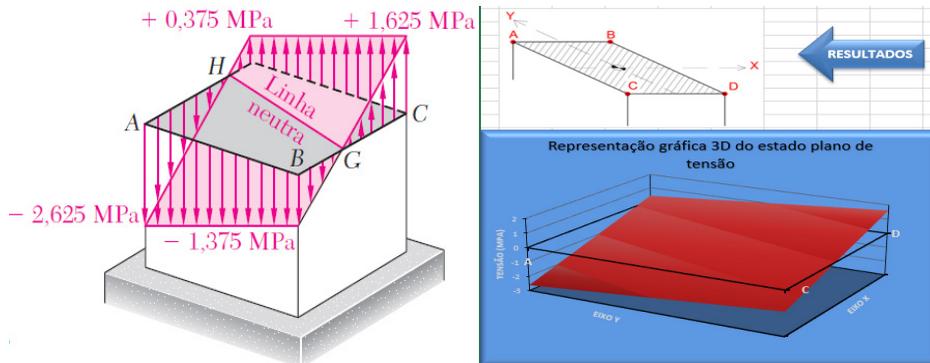
**Figura 10** – Interface da pasta de trabalho, planilha “distribuição de tensões”



Fonte: Autores (2020).

Para uma melhor visualização, é possível realizar uma comparação das representações gráficas obtidas pela planilha e disponibilizadas no livro, apresentadas nas Figuras 4 e 10.

**Figura 11** – Comparação das representações gráficas do exercício resolvido com os resultados obtidos na planilha



Fonte: Autores (2020).

É notório, com base na Figura 11, que os resultados obtidos por meio da pasta de trabalho estão em total concordância com o apresentado por Beer (2011), validando assim o programa desenvolvido.

## 8 CONCLUSÕES

Os objetivos principais deste trabalho foram: realizar uma breve revisão a respeito de elementos que estejam sujeitos a um carregamento excêntrico e criar uma planilha para que seja possível obter uma visualização analítica e gráfica de forma precisa e clara as tensões que este carregamento gera ao longo da seção transversal.

Com base nos resultados obtidos e mostrados no Capítulo 8, conclui-se, portanto, que a planilha obteve sucesso cumprindo com o objetivo do qual a mesma foi produzida. Dessa forma, a ferramenta pode ser utilizada tanto por docentes quanto discentes que queiram visualizar de forma rápida e precisa o estado global de tensões que o elemento estará sujeito, além de também realizar suas próprias análises com bases nos gráficos gerados.

Sugere-se ainda, para continuar o estudo, aumentar a quantidade de cargas excêntricas que a seção pode receber e também a criação de uma ferramenta que analise outras seções, como seção em forma de "T" ou de "I", por exemplo.

## REFERÊNCIAS

ASSIS, Wayne Santos de. **Sistemas computacionais de apoio à monitoração de estruturas de engenharia civil**. 2007. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2007.

ASSIS, Wayne Santos de; BITTENCOURT, Túlio Nogueira. **Utilização de recursos multimídia no ensino de concreto armado e protendido**. 2002.

ASSIS, Wayne Santos de; BITTENCOURT, Túlio Nogueira; NORONHA, Marcos Aurélio Marques. Desenvolvimento de recursos multimídia para o ensino de estruturas de concreto. **Revista Ibracon**, v. 11, n. 32, p. 41-51, 2003.

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E.R. **Mecânica dos Materiais**. 5. ed. Makron Books, 2011.

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R. **Resistência dos Materiais**. 3. ed. Makron Books, 1995.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

GERE, J. M. **Mecânica dos Materiais**. Editora Thomson Learning, 2003.

---

**Data do recebimento:** 21 de maio de 2021

**Data da avaliação:** 9 de agosto de 2021

**Data de aceite:** 12 de setembro de 2021

---

---

1 Acadêmico do curso de Engenharia Civil do Centro Universitário Tiradentes – UNIT/AL.

E-mail: lucas\_pll@hotmail.com

2 Professor do Centro Universitário Tiradentes – UNIT/AL.

E-mail: jonas.rafael@souunit.com.br

3 Professor do Centro Universitário Tiradentes – UNIT/AL.

E-mail: diego.faro@souunit.com.br

4 Acadêmico do curso Engenharia Civil do Centro Universitário Tiradentes – UNIT/AL.

E-mail: fabiodecarvalhojr@outlook.com