MODELAGEM MATEMÁTICA E ANÁLISE DE SISTEMAS DINÂMICOS EM VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS

Thiago Ferro Faustino[1]
Erika Paiva Tenório de Holanda[2]

Engenharia Civil

cadernos de graduação
ciências exatas e tecnológicas

ISSN IMPRESSO 1980-1777
ISSN ELETRÔNICO 2357-9919

RESUMO

Uma técnica de sistemas dinâmicos, na tentativa de reduzir vibrações excessivas em estruturas. Existiram durante alguns séculos algumas aplicações de caráter passivo com o objetivo de solucionar problemas de funcionamento estrutural ou de melhorar a resistência de construções quando se tratava de abalos sísmicos. Um dos casos mais observados, e que ainda hoje continua a ser muito utilizado, tem a ver com a tentativa de tentar atenuar as vibrações por meio da introdução de elementos que aumentem a rigidez das estruturas. Este procedimento, que pode ser encarado como uma simples operação de reforço, não é nada mais que um processo de controlo por meio da introdução de elementos de rigidez passiva, provocando uma alteração da dinâmica do sistema e, consequentemente, da sua resposta a ações exteriores. Também no passado se registraram soluções de controle um pouco mais sofisticadas, como por exemplo, a utilização de uma camada arenosa sob a fundação de determinadas construções. Apesar de terem existido um conjunto de esforço ao longo dos anos deste último século, só em 1868 J. C. Maxwell formulou matematicamente o problema de controle, sendo capaz de explicar a origem da instabilidade em um sistema realimentado. Mas em meados do século passado foi que a teoria do controle de sistemas sofreu uma clara evolução, impulsionada pela revolução industrial, pela necessidade de comunicações durante as duas grandes guerras mundiais e, posteriormente, pela época da exploração espacial. Devido às contribuições de H.S. Black, H. Nyquist e H. W. Nos anos 20 e 30 do século passado, foi possível estabelecer técnicas de análise de sistemas em domínio da frequência que ainda hoje são ensinadas no contexto dos sistemas lineares do tipo *Single-Input/Single-Output* (SISO). Durante a segunda metade desse século, com o surgimento do computador digital e com necessidade de resolver problemas de controlo associados às viagens espaciais, verificou-se um grande desenvolvimento de técnicas direcionadas para sistemas multivariáveis (MIMO) tais como o controle óptico. Na Engenharia Civil, só a partir do inicio da década de 1970, é que se começou a se desenvolver e implementar dispositivos específicos para sistemas de controle integrados em estruturas de edifícios. Neste contexto, surgiram as primeiras aplicações de controlo passivo, utilizando diversos tipos de amortecedores adaptados as fundações de edifícios, com o objetivo de melhorar o processo de dissipação da energia absorvida pela ocorrência de sismos.

PALAVRAS–CHAVE

Modelagem. Estruturas. Vibração.

ABSTRACT

A technique of dynamic systems in an attempt to reduce excessive vibrations in structures. Existed for several centuries some passive character of applications in order to solve structural malfunction and to improve the resistance of buildings when it came to earthquakes. One of the cases observed, and that even today continues to be widely used, has to do with the attempt to try to mitigate the vibrations by introducing elements that increase the rigidity of the structures. This procedure, which can be seen as a simple booster operation, is nothing more than a control process by introducing passive stiffness elements, causing a change of system dynamics and consequently its response to external actions. Also last registered control a bit more sophisticated solutions, such as the use of a sandy layer under the foundation of certain constructions. While there have been a number of efforts over the years of the last century, only in 1868 J.C. Maxwell mathematically formulated the control problem being able to explain the origin of instability in a feedback system. But in the last century it was that the systems of control theory has undergone a clear evolution, driven by the industrial revolution, the need for communications during the two world wars and, later, by the time of space exploration. Due to the contributions of H. S. Black, H. Nyquist and H.W. In the 20s and 30s of last century, it was possible to establish technical analysis systems in the frequency domain which are still taught in the context of linear systems of type SISO (Single-Input/Single-Output). During the second half of this century, with the advent of the digital computer and need to solve control problems associated with space travel, there was a great development of targeted techniques for multivariable systems (MIMO) such as optical control. In Civil Engineering, just from the beginning of the 70s, it is that it began to develop and implement specific devices for integrated control systems on building structures. In this context emerged the first passive control applications using various types of dampers adapted foundations of buildings with the aim of improving the dissipation of energy absorbed by the process of occurrence of earthquakes.

KEYWORDS

Modeling. Structures. Vibration.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho teve como ponto principal o desenvolvimento de modelos numéricos que permitam simular o comportamento dinâmico de estruturas que é uma ferramenta matemática essencial no contexto da análise e dimensionamento de sistemas de controle. Por este motivo, é feita aqui uma incursão em alguns métodos de representação de sistemas com o interesse na área do controle de vibrações. Após alguns estudos sobre elementos de cálculo matricial e análise modal, poderíamos dizer que a análise modal é um processo por meio do qual descrevemos uma estrutura em termos de suas características naturais, que são as frequências naturais, os fatores de amortecimento e as formas modais, ou seja, suas propriedades dinâmicas.

Tal definição, entretanto, está baseada em termos técnicos usados na área das vibrações, é abordado o tema da utilização da Transformada de Laplace e Transformada Inversa de Laplace para a conversão de funções expressas no domínio do tempo para o domínio da variável complexa de Laplace e vice-versa. O uso desta transformada potencializa modelagem matemática poderosos de representação de sistemas, principalmente porque operações como a derivação e integração, ou até funções senoidais e exponenciais no domínio do tempo, são tratadas algebricamente no domínio de Laplace. Por este assunto não ser tradicionalmente ensinado nos cursos de Engenharia Civil, neste trabalho é feita uma descrição relativamente detalhada dos aspectos considerados mais relevantes.

Foi, também, expressa aqui uma abordagem aos métodos de representação de sistemas por meio de equações do movimento, de equações de Entrada e Saída, por meio de funções de transferência e também recorrendo à formulação de estado. São apresentados os procedimentos que permitem converter modelos desenvolvidos com base numa determinada representação para outra representação diferente. Aborda-se, também, a representação canônica controlável e observável dos modelos de estado, bastante útil para o dimensionamento de controladores que se utilizam de técnicas de controle ativo de vibração (AVC - Active Vibration Control) e de observadores.

Finalmente, expomos alguns métodos de análise de resposta de sistemas no domínio do tempo e da frequência. São também expostos alguns métodos de representação gráfica de Funções de Resposta em Frequência, designadamente a representação de Bode e de Nyquist.

1.1 ELEMENTOS DE CÁLCULO MATRICIAL E ANÁLISE MODAL

Uns dos problemas matemáticos da determinação de valores e vetores próprios de uma determinada matriz revestem-se da maior importância à resolução de problemas de engenharia, como por exemplo, a determinação de frequências próprias e modos de vibração de sistemas mecânicos.

Considere-se uma matriz A quadrada de ordem n, a qual pode ser considerada como um operador linear que transforma vetores de ordem n em outros vetores de ordem n. A questão que se coloca é saber se existem vetores cuja direção permaneça invariante após a transformação linear. A direção de um vetor qualquer x ≠ 0 e de um vetor $y = Ax$, resultante da transformação de x sob a ação de A, não é normalmente a mesma, contudo, haverá certos vetores x que após a transformação linear são paralelos a y. Para que as direções de x e y permaneçam inalteradas é necessário que os dois vetores sejam paralelos, ou seja, $y = \lambda x$ para certo λ. O problema de valores e vetores próprios consiste, então, em determinar a solução não trivial $(x = 0)$ dos valores de λ e x, tal que

$$Ax = \lambda x \tag{3.1}$$

Os valores de λ são designados valores próprios e os correspondentes vetores x são designados vetores próprios. O sistema de equações expresso na eq.(3.1) pode ser reescrito na seguinte

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{3.2}$$

o qual tem uma solução não trivial, se e só se a matriz $(A - \lambda I)$ for singular, o que corresponde a dizer que

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{3.3}$$

conduzindo a uma equação conhecida como a equação característica de A.

Uma vez determinados os valores próprios, os respectivos vetores próprios podem ser encontrados, resolvendo o sistema de equações (3.2) para cada valor de λ. A resolução deste sistema conduz a uma indeterminação só possível de resolver, atribuindo um fator de escala ao vetor próprio. No entanto, para matrizes A de dimensão elevada, o procedimento descrito torna-se bastante fastidioso, sendo mais vantajoso utilizar métodos numéricos alternativos.

"Solução do sistema de equações de ordem N que leva a uma forma matricial aplicando fator de escala para o vetor próprio, é descrito em um método matemático usado por" (PINA, 2010, p. 187).

1.2 TRANSFORMAÇÃO MATRICIAL E DIAGONALIZAÇÃO

A modelagem de qual quer sistemas linear conduz frequentemente à definição de matrizes que não possuem qualquer forma especial. Nestas situações o mais indicado é aplicar uma transformação matricial de tal forma que a matriz resultante seja de tratamento mais fácil, havendo particular interesse na obtenção de matrizes diagonais ou matrizes com outras formas especiais. Para tal, convém definir que duas matrizes quadradas de ordem n, A e B, são matrizes similares se existir uma matriz não singular da mesma ordem, S, de tal forma que B = S^{-1}AS, ou inversamente, A = S^{-1} BS. Uma das propriedades mais interessantes das matrizes similares é que, independentemente da matriz S escolhida, os respectivos valores próprios são iguais. Isto significa que qualquer valor próprio de A é também valor próprio de B, e vice-versa. Para demonstrar este fato, considere-se, por exemplo, que λ é valor próprio de B. Se tal suceder, pode afirmar-se que, de acordo com a eq.(3.3),

$$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I}|=\boldsymbol{0}$$

A transformação matricial referida assume primordial importância quando a matriz de transformação é a matriz modal de uma dada matriz que se pretende transformar, ou seja, quando $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{\Phi}$. Neste caso particular, verifica-se que

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Omega} \qquad (3.4)$$

Em que Φ é a matriz modal de A, sendo Ω a correspondente matriz espectral. Desta transformação ressalta o fato de se ter transformado uma matriz não diagonal numa matriz similar diagonal. Este processo designa-se normalmente de diagonalização da matriz A (VEGTE, 2002, p. 90).

1.3 FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS

Uma das situações muito importante e relevante neste trabalho diz respeito à necessidade de resolução de um problema de valores e vetor próprio, diz a determinação de frequências naturais e correspondentes modos de vibração de sistemas mecânicos. Neste caso, procura-se conhecer em que circunstâncias estes sistemas descrevem um movimento harmônico quando submetidos a uma vibração livre.

“Uma solução possível para aplicação em sistemas que oscilam produzindo um sistema harmônico, quando submetido a uma vibração livre de 1° grau é aplicar a 2° lei de Newton” (VEGET, 2002, p. 76).

Obtemos,

$$\boldsymbol{M}_s\ddot{\boldsymbol{Y}}_s(t)+\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{y}_s(t)=\boldsymbol{0} \qquad (3.5)$$

Numa primeira abordagem interessa considerar sistemas não amortecidos, cuja resposta livre é governada pela equação onde Ms é matriz de massa e Ks a matriz de rigidez do sistema, ys(t) representam os vetor aceleração e deslocamento, respectivamente, associados aos diversos graus de liberdade. A resposta do sistema, em cada instante, admite-se poder ser expressa como

$$Y_s(t) = \phi sen\omega t \quad (3.6)$$

Onde ϕ é um vetor que representa a forma do modo de vibração do sistema, supostamente invariável no tempo, e ω a freqüência natural de vibração. Derivando esta equação duas vezes em ordem ao tempo, obtém-se

$$Y''_s(t) = -\phi\omega^2 sen\omega t \quad (3.7)$$

Substituindo a eq.(3.6) e (3.7) na eq.(3.5), resulta

$$(k_s - \omega^2 M_s)\phi = 0 \quad (3.8)$$

Correspondente a um problema de valores e vetores próprios tal como definido na eq.(3.2), bastando para isso multiplicar cada termo da equação por M_s^{-1}, admitindo que existe inversa de M_s. Neste caso, ω^2 está relacionado com os valores próprios e ϕ com os vetores próprios do sistema. Os resultados obtidos podem ser condensados em matrizes quadradas de ordem N, sendo N o número de graus de liberdade do sistema o qual está em correspondência com o número de frequências naturais e modos de vibração. As frequências naturais podem ser agrupadas em uma matriz espectral.

1.4 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Atribuímos aqui à principal função da Transformada de Laplace para que possibilite transformar funções comuns, tais como funções senóidais e exponenciais, em funções algébricas de uma variável complexa, bem como transformar operações como a integração e derivação em operações algébricas em função dessa variável complexa. Assim, uma equação diferencial linear pode ser convertida numa equação algébrica em função de uma variável complexa e, posteriormente, ser resolvida em ordem essa variável. A vantagem deste método é que, paralelamente à simplicidade de resolução de uma equação algébrica, é possível expressar a solução em termos da variável dependente da equação diferencial inicial, por meio da operação inversa da Transformada de Laplace.

A solução para uma equação diferencial de ordem N que rege o comportamento de sistemas lineares invariáveis no tempo pode, em determinados casos, ser difícil ou laboriosa, recorrendo a alguns dos métodos clássicos utilizados na resolução de equações diferenciais ordinárias. Para estas situações, a Transformada de Laplace pode permitir resolver estas equações por um processo alternativo mais rápido.

Na Transformada de Laplace ela assume, também, um particular interesse na modelagem e análise de sistemas, na medida em que permite a construção de funções de transferência, às quais relacionam, no domínio de Laplace, a relação determinística entre ação e a resposta. Além disso, possibilita a construção de diagramas de blocos bastante úteis para o estudo de sistemas de controle realimentados. A utilização da Transformada de Laplace tem, também, a vantagem de potencializar métodos gráficos de análise e dimensionamento de sistemas de controle, possibilitando usar as técnicas de controle ativo e passivo, os quais podem ser utilizados para avaliar qualitativamente o desempenho do sistema, sem a necessidade de primeiramente resolver a equação diferencial que o descreve (PINA, 2010, p. 67).

A Transformada de Laplace é definida da seguinte maneira, na qual s é a variável complexa designada variável de Laplace, L é o operador da Transformada de Laplace e $F(s)$ é a Transformada de Laplace da função $f(t)$ definida tal que $f(t)=0$ para t <0.

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{3.9}$$

Para que esta transformada exista, a integral da equação 3.9, designado de integral de Laplace, tem de ser convergente. Para isso, é necessário que a função $f(t)$ seja contínua em qualquer intervalo de tempo finito definido em t ∈ [0,∞], e que seja limitada por uma função do tipo exponencial.

> Para a aplicação da transformada de Laplace é fundamental que a função seja continua em um intervalo de tempo finito, isso implica que o integral seja convergente, para que o operador consiga transformar a função em ema função mais simples. (VU; RAMIN, 1998. p. 50).

Ou seja

$$\left|f(t) \leq Me^{at}\right|$$

Em que a e M são constantes reais convenientemente definidas considerando t ∈ [0,∞]. Nos casos em que a Transformada de Laplace é diferente, dependendo se considera o limite inferior imediatamente antes ou depois da origem dos eixos, como sucede quando a função $f(t)$ tem uma função impulso aplicada em t =0 (definida na secção seguinte), então o limite inferior do integral de Laplace tem de ser claramente especificado se é tomado como t =0^- ou t =0^+. Se considerar o limite inferior t =0^-, então deve utilizar-se para a Transformada de Laplace a notação $L^-\{f(t)\}$ ou, no caso contrário, $L^+\{f(t)\}$.

2 METODOLOGIA

Para a elaboração deste projeto foi necessário pesquisar métodos matemático que podem fornecer a melhor ferramenta para implementações em laboratório de sistemas de controle em modelos físicos com um ou vários graus de liberdade. Estes ensaios tiveram como objetivo a verificação teórica e análise em prática de muitos dos conceitos teóricos referidos anteriormente. Efetivamente, a essa possibilidade de mensurar e observar o efeito do controle sobre uma determinada estrutura vem e enriquece a compreensão relativa a problemas de ordem prática que surgem no real funcionamento destes sistemas.

Tomamos como partida para obtenção das equações do movimento de um sistema dinâmico, aplicando as leis físicas que regem seu o comportamento. Este trabalho foi dirigido para o estudo de sistemas mecânicos, a dedução das equações do movimento destes sistemas é feita recorrendo à mecânica Newtoniana, partindo do princípio fundamenta da dinâmica, segundo a qual o somatório das forças exteriores que atuam num determinado corpo é igual ao produto da sua massa pela sua respectiva aceleração.

> Aplicada uma função de transferência de um sistema dinâmico, a qual relaciona a resposta medida do sistema com a resposta do referencial admitindo a ausência ou não de perturbação no meio, para se obter a função de transferência aplica-se a transformada de Laplace. (QUINTINO, 2012, p. 21).

Considere-se o sistema linear de 1° grau de liberdade, constituído por um corpo de massa m, ligado ao exterior por meio de uma mola de rigidez k e por um amortecedor viscoso de constante de amortecimento c, ao qual está aplicado uma força variável no tempo u(t), obtemos,

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = u(t)$$

$y''(t)$, $y'(t)$, $y(t)$ representam a aceleração, a velocidade e o deslocamento do corpo, respectivamente, $my''(t)$ é à força da inércia, $cy'(t)$ e a força de amortecimento e $ky(t)$ é a força elástica.

Partindo deste pensamento o sistema que for constituído por um conjunto de corpos, quando aplicada a 2° lei de Newton a cada um deles, permite obter as equações do movimento associadas ao movimento global deste sistema. Considere-se o sistema mecânico linear agora de N graus de liberdade, caracterizado por um conjunto de massas m_1, m_2,..., m_N , ligadas ao exterior por meio de uma mola de rigidez k_1 e amortecedor viscoso de constante de amortecimento c_1 , e ligadas entre si por meio de molas de rigidezes k_2, ... , k_N e amortecedores viscosos de constantes de amortecimento c_2, ... , c_N, solicitado por forças variáveis no tempo u_1 (t), u_2 (t),... , u_N (t),.

O diagrama de corpo livre respectivos, associados ao equilíbrio dinâmico de cada um dos corpos tem, escrevendo as equações de equilíbrio relativas a cada um dos corpos obtém-se as seguintes equações do movimento, correspondentes a sistema de equações diferenciais de 2° ordem, que aqui podemos chamar de variável de entrada e saída.

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_{m-1} u'(t) + b_m u(t)$$

Onde $u(t)$ é variável de entrada e $y(t)$ variável de saída.

Este sistema de equações pode ser reescrito na seguinte forma matricial

$$m_s y''_s(t) + c_s y'_s(t) + k_s y_s(t) = u_s(t)$$

Onde $y_s''(t)$, $y_s'(t)$, $y_s(t)$ representam o vetor aceleração, velocidade, e deslocamento, respectivamente, e $u_s(t)$ o vetor das forças, dados por

$$y''_s(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{Bmatrix} \quad y'_s(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{Bmatrix} \quad y_s(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{Bmatrix} \quad u_s(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{Bmatrix}$$

As matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, definidas da seguinte maneira

$$m_s = \begin{vmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & m_n \end{vmatrix}$$

Para determinar a função de transferência de sistema mecânico com 1° grau de liberdade, aplicando a equação do movimento definida anteriormente temos

$$m_s y''_s(t) + c_s y'_s(t) + k_s y_s(t) = u_s(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace,

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Obtemos,

$$(ms^2 + cs + k)Y(s) = U(s)$$

Ou seja,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Temos agora uma função muito simples ser usado no sistema dinâmico de 1° grau de vibração.

3 CONCLUSÕES

Neste presente trabalho procurou-se fazer uma abordagem aos problemas de controle de vibrações em Estruturas de Engenharia Civil. A área do controle de sistemas está ligada tradicionalmente a outros domínios da Engenharia, verificando-se que os assuntos relacionados com este tema não integram o conteúdo programático de disciplinas na área da Engenharia de Estruturas. Quando muito, abordam-se por vezes alguns aspectos básicos relacionados como o controle, dando ênfase essencialmente à caracterização de sistemas passivos.

Neste contexto, buscou-se com este trabalho apresentar, numa linguagem acessível a Engenheiros Civis, alguns princípios fundamentais deste vasto tema, com particular relevância para os sistemas ativos, que podem ser encarados como o caso geral dos problemas de controle, na medida em que qualquer outro sistema pode ser dele idealizado ou deduzido. O assunto abordado foi tanto quanto possível observar, matematicamente, sistemas de um ou de vários graus de liberdade, de modo a que se possam compreender assuntos relacionados, por exemplo, com as ações básicas de controle, com a análise estrutural de um prédio que oscila decorrente da ação do vento, com o problema de vibração provocado pelo andar em cima de um pavimento.

REFERÊNCIAS

PINA, H. **Métodos numéricos.** Lisboa: Escola, 2010.

VEGTE, J. V. **Feedback control systems.** Prentice-Hall, 5.ed, 2002.

VU, H.; RAMIN, E. **Dynamic systems**, McGraw-Hill, 1998.

QUINTINO, Flávio Vieira. **Controle ativo de vibração em edifícios.** Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, 2012.

Data do recebimento: 27 de junho 2015
Data de avaliação: 29 de julho 2015
Data de aceite: 25 de agosto 2015

1. Acadêmico do Curso de Engenharia Civil no Centro Universitário – UNIT. E-mail: thiagoferrofaustino@gmail.com
2. Professora do Curso de Engenharia Civil no Centro Universitário – UNIT. E-mail: eptholanda@gmail.com