

# PLANILHA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO TORÇÃO EM BARRAS CIRCULARES

Paulo Lucas Leite do Nascimento<sup>1</sup>

Jonas Rafael Duarte Cavalcante<sup>2</sup>

Bruna Camerino Lira Uchoa<sup>3</sup>

Engenharia Civil



ISSN IMPRESSO 1980-1777

ISSN ELETRÔNICO 2316-3135

## RESUMO

A utilização de recursos de multimídia como auxílio no aprendizado de diversas disciplinas em vários cursos tem sido muito eficiente e está cada vez mais sendo empregada pelo mundo todo. Com base nisso, vários recursos computacionais têm sido desenvolvidos em diferentes softwares. Nesse contexto, o presente trabalho se trata da apresentação de uma pasta de trabalho desenvolvida no *software* Microsoft Office Excel que auxilia o aprendizado da disciplina Resistência dos Materiais na resolução de exercícios que envolvem torções pontuais em barras lineares de seção transversal circular maciças ou vazadas com diâmetros constantes ou variados à qual o utilizador precisa apenas digitar em algumas células da planilha alguns dados disponibilizados pelo exercício e a mesma mostra automaticamente resultados que geralmente são cobrados em tais problemas. Sendo assim, este trabalho mostra ao utilizador como inserir os dados na planilha e como interpretar os seus resultados.

## PALAVRAS-CHAVE

Torção de barras circulares; Recurso de multimídia; Planilha para resolução de exercícios.

## ABSTRACT

The use of multimedia resources to assist in the learning of various subjects in various courses has been very efficient and is increasingly being used around the world. Based on this, various computational resources have been developed in different software. In this context, the present article deals with the presentation of a workbook developed in the Microsoft Office Excel software that assists the learning of the Material Resistance discipline in the resolution of exercises that involve punctual torsions in solid or hollow circular cross section linear bars with diameters constant or miscellaneous which you only need to enter in some worksheet cells some data provided by the exercise and it automatically shows results that are usually charged for such problems. Thus, this work shows the user how to enter the data in the spreadsheet and how to interpret its results.

## KEYWORDS

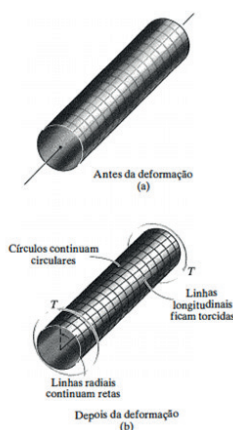
Torsion of circular bars; Multimedia feature; Exercise Resolution Worksheet.

## 1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos estudos na disciplina de resistência dos materiais, é de grande importância o estudo do torque ou momento torsor aplicado em barras. O momento torsor ou a torção é um momento aplicado em torno do eixo longitudinal do elemento em estudo e deve ser levado bastante em consideração em projetos de eixos ou eixos de acionamento de veículos e diversas estruturas.

Quando o torque é aplicado, uma distorção é causada na barra que pode ser ilustrado de acordo com a figura 01.

**Figura 01** – Ilustração da distorção causada pelo torque

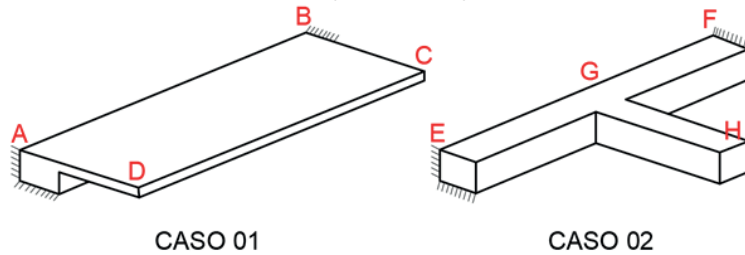


Fonte: Hibbeler, 2010.

Quando aplicado, o torque causa uma rotação na seção transversal do elemento em relação ao estado inicial, o qual é chamado de ângulo de torção. Além disso, uma outra consequência da aplicação deste momento é um esforço cisalhante que tende a cortar a seção transversal da barra, representado na figura 01 como círculos.

Um exemplo de torção na engenharia civil são as vigas que possuem uma laje em balanço ou outra viga engastada que esteja em balanço, exemplificado na figura 02.

**Figura 02** – Exemplos de torção em vigas na engenharia civil



Fonte: Autoral com auxílio dos softwares AutoCAD e Paint.

Analisando a figura 02, no caso 01 a viga AB está sofrendo torção devido ao peso da laje ABCD. Este tipo de torção é um momento torsor distribuído uniformemente por todo comprimento da viga AB. Já ao analisar o caso 02, a viga EF sofre uma torção pontual em G devido ao peso da viga GH que está engastada na viga EF exatamente em G.

Segundo ASSIS (2002, p. 02) "Várias experiências utilizando recursos de multimídia aplicados ao ensino de engenharia vêm sendo efetuadas tanto no Brasil como no exterior, obtendo-se de modo geral resultados bastante positivos". A partir disso, pode-se dizer que o estudo através da utilização de recursos computacionais pode facilitar o aprendizado devido à interação e viabilidade de resolver problemas trabalhados cotidianamente.

"Com o advento dos computadores e posterior desenvolvimento de sistemas de aquisição, a atividade de registro de dados sofreu profundas modificações, tornando-se possível automatizar a aquisição e o armazenamento dos dados. Com a contínua disponibilização de recursos computacionais com capacidade de processamento cada vez maior, a Engenharia de Estruturas passou a ter à disposição recursos para a elaboração de modelos matemáticos sofisticados" (ASSIS, 2007).

Ao pensar na disciplina resistência dos materiais, dos cursos de engenharias, é notório que problemas envolvendo torção de barras circulares possuem, em sua maior parte, uma forma de resolução semelhante. Com base nisso, o presente trabalho tem como objetivo principal introduzir e explicar uma planilha do Microsoft Office Excel criada pelo autor que servirá como auxílio no aprendizado da disciplina em questão, onde a mesma já se encontra disponível para download no link: <<https://drive.google.com/file/d/17hjk2x9faV7YcZMFrtDHEinfItENx9oI/view>>.

## 2 METODOLOGIA

### 2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A princípio, ao estudar Torção de barras circulares na disciplina Resistência dos Materiais, sabe-se que a partir dos dados do problema é possível calcular diversas informações como o momento polar de inércia da barra, ângulo de torção que um ponto da seção transversal da barra sofre ao aplicar o torque e a tensão de cisalhamento que um ponto localizado a uma determinada distância da seção transversal da barra sofre.

Conforme Hibbeler (2010, 125-129) através dos estudos das propriedades da barra circular, maciça ou vazada, levando em consideração que o material deve ser homogêneo, linear e elástico, tudo conforme a lei de Hooke, são desenvolvidas várias “fórmulas da torção”, conforme exemplificadas a seguir.

$$J = \frac{\pi(D_e^4 - D_i^4)}{32} \quad (\text{Equação 01});$$

$$\theta = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \quad (\text{Equação 02});$$

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J} \quad (\text{Equação 03}).$$

Onde as incógnitas e suas respectivas unidades de medida padronizadas na planilha são:

- J – Momento polar de inércia (m<sup>4</sup>);
- D<sub>e</sub> – Diâmetro externo da seção transversal da barra (m);
- D<sub>i</sub> – Diâmetro interno da seção transversal da barra (m);
- θ – ângulo de torção (Rad);
- T – Momento tursor ou Torque atuante no intervalo estudado da barra (N.m);
- L – Comprimento do intervalo estudado da barra (m);
- r – Distância de um ponto localizado na seção transversal da barra até seu centroide (m);
- G – Módulo de elasticidade transversal do material (GPa).
- t – Tensão de cisalhamento atuante num ponto da seção transversal do intervalo em estudo à uma distância do centroide (MPa).

## 2.2 INTERFACE DA PLANILHA

Figura 03 – Captura de tela da Interface da Planilha

Para barras lineares: livres ou engastadas em A; de seção transversal circulares maciça ou vazada; de diâmetros constantes ou variados; apenas com torções pontuais.

Módulo de Elasticidade transversal do material G (GPa)

Ponto	Torque pontual T (N.m)
A	100
B	-200
C	200
D	-200
E	200
F	-200
G	100

TPOSITIVO TNEGATIVO

Observação: Caso o intervalo não seja vazado, digite 0 ou não digite nada para o diâmetro interno.

Se a barra possuir menos de 7 pontos, digite 0 para os diâmetros externos restantes.

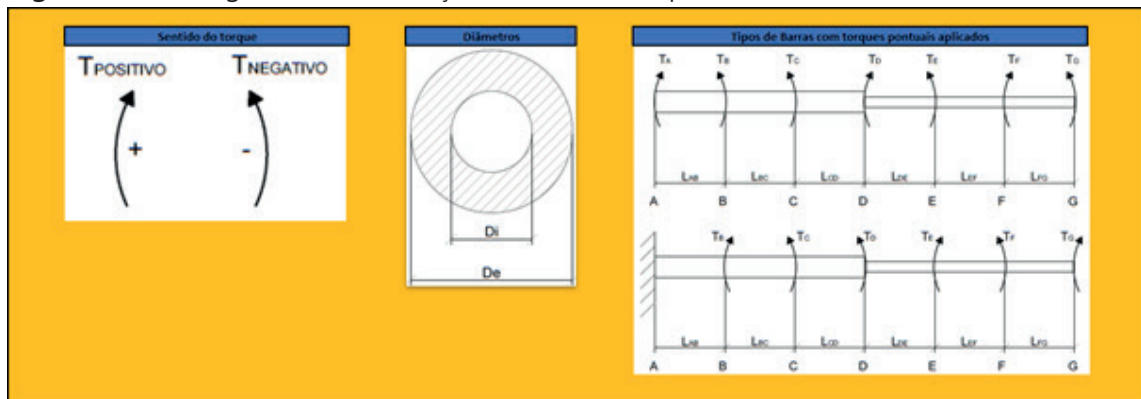
Intervalo	Torque [N.m]	Distância entre os pontos do intervalo l (m)	Diâmetro externo do intervalo De (m)	Diâmetro interno do intervalo Di (m)	Momento Polar de Inércia J (m <sup>4</sup> )	Tensão máxima de cisalhamento τ <sub>max</sub> (MPa)	Tensão Mínima de Cisalhamento τ <sub>min</sub> (MPa)	Ângulo de torção φ (Rad)	Deslocamento ponto no limite transversal do eixo δ (mm)
AB	-100	0,5	0,05	0,01	6,12611E-07	4,0809	0,8162	-0,0010	-0,0255
BC	100	0,5	0,05	0,01	6,12611E-07	4,0809	0,8162	0,0010	0,0255
CD	-100	0,5	0,05	0,01	6,12611E-07	4,0809	0,8162	-0,0010	-0,0255
DE	100	0,5	0,05	0,01	6,12611E-07	4,0809	0,8162	0,0010	0,0255
EF	-100	0,5	0,05	0,01	6,12611E-07	4,0809	0,8162	0,0010	0,0255
FG	100	0,5	0,05	0,01	6,12611E-07	4,0809	0,8162	0,0010	0,0255

Ângulo de torção no ponto mais distante do ponto A φ<sub>B</sub> (Rad) 0,0020

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a elaboração da planilha, fez-se necessária a relação entre as células dispostas de modo a relacionar os dados que serão digitados pelo usuário com as equações 01, 02 e 03 já disponibilizadas no item 2.1. Desse modo, para a utilização correta da planilha, o usuário precisa entender as convenções adotadas na mesma. Com base nisso, imagens autoexplicativas elaboradas pelo autor são dispostas na interface da planilha "barras lineares" da pasta de trabalho e também são dispostas ampliadas na planilha "imagens para auxílio ampliadas" como mostrado na figura 04.

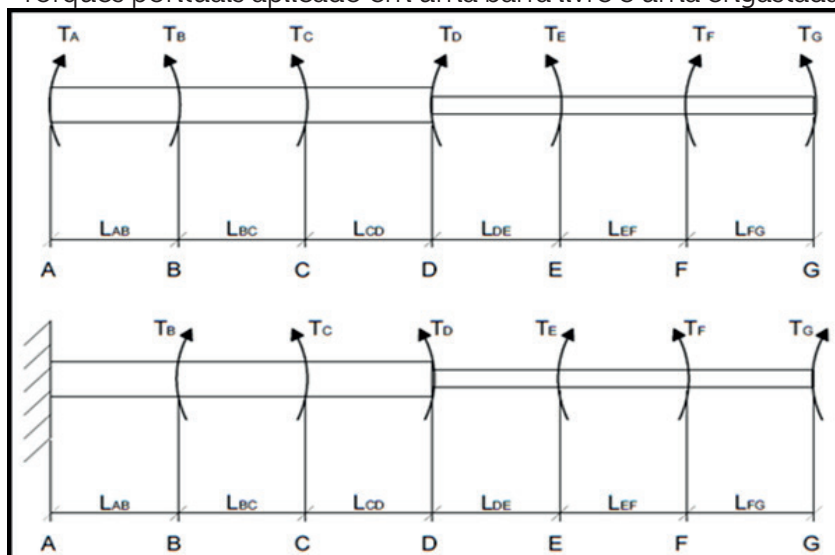
Figura 04 – Imagens da convenção utilizadas na planilha



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como mostrado na figura 04, os valores a serem digitados pelo usuário para os torques pontuais ( $T$ ) devem ser positivos se estiverem no sentido horário e negativos no sentido anti-horário. Com base nisso, observando a figura 05 (ampliação da figura 04), é possível determinar que, na barra livre, devem ser interpretados como torques positivos e devem ser interpretados como torques negativos. Com base nesta mesma analogia, na barra engastada em A (barra inferior exemplificada na figura 05), devem ser interpretados como torques positivos e devem ser interpretados como torques negativos.

**Figura 05** – Torques pontuais aplicado em uma barra livre e uma engastada no ponto A



Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, ainda analisando a figura 05, o usuário deve interpretar como sendo ponto A o local da barra que está engastado. Caso seja livre, qualquer extremidade da barra pode ser considerada ponto A. Após identificar os pontos da barra, a barra não necessita ser subdividida em 7 pontos (A, B, C, D, E, F e G), pois a mesma deve ser dividida sendo um ponto o local exato onde está localizado cada torque, sendo sete pontos o máximo possível utilizando esta planilha. Desse modo, caso haja apenas três torques na barra livre, por exemplo, faz-se necessário dividir a barra em seus respectivos intervalos.

Os valores digitados para o torque em cada ponto (Coluna C, linha 8 até a linha 14) devem ser em N.m, sendo necessária a conversão para esta unidade se o valor disponibilizado no exercício prático esteja em outra unidade. Caso a barra seja engastada, o valor do torque em A não necessita ser digitado pelo usuário, podendo deixar o espaço reservado para o torque em A (Célula C8 da planilha) como zero ou sem nada digitado, pois a mesma já calcula qual seria a reação do engaste para o torque. Entretanto, caso o usuário sinta-se à vontade para calcular a reação do engaste, o mesmo pode ser digitado na célula C8 e a planilha interpretará a barra como sendo livre, porém sem alterar qualquer resultado decorrente desta escolha.



O módulo de elasticidade do material deve ser digitado pelo usuário no espaço reservado para isso, como mostrado na figura 03 (Célula A8 da planilha) e sua unidade de medida deve ser GPa, não sendo necessária a conversão para Pa.

As distâncias entre os pontos (L) devem ser digitadas nas células da coluna C a partir da linha 18, como mostrado na figura 03, sendo necessário apenas digitar estes valores caso haja um intervalo e sua unidade de medida é em metros. Se, por exemplo, a barra possuir apenas três intervalos (AB, BC e CD) os valores para os intervalos seguintes (DE, EF e FG) não devem ser digitados ou devem digitar o número zero.

Nas colunas D e E, da linha 18 até a linha 22, devem ser digitados os diâmetros externos e internos do intervalo em estudo e, caso o intervalo da barra não seja vazado, os diâmetros internos devem ser digitados pelo usuário como o número zero ou nada deve ser digitado no local reservado.

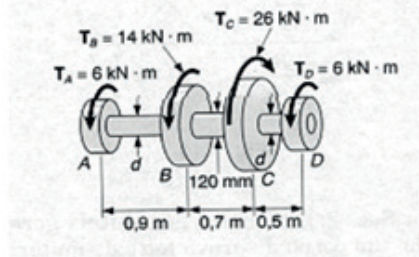
Após o usuário digitar os dados que o mesmo deve interpretar pelo exercício, a planilha mostrará os resultados de momento polar de inércia do intervalo; tensões máximas e mínimas de cisalhamento que ocorrem em cada intervalo decorrentes do momento torsor; ângulo de torção no limite de cada intervalo e ângulo de torção no ponto mais distante possível do ponto A nas unidades de Rad ou Graus; Deslocamento de um ponto localizado no ponto mais distante do início do intervalo e no limite da seção transversal e Deslocamento de um ponto localizado no limite da seção transversal no ponto mais distante possível do ponto A.

### 2.3 EXEMPLOS A SEREM RESOLVIDOS

Para demonstração da aplicação da planilha, é possível resolver os exercícios disponíveis no livro Mecânica dos Materiais, BEER (2011, p. 152).

**Figura 06** – Exercício 1

- 1) O eixo circular BC é vazado e tem diâmetros interno e externo de 90 mm e 120 mm, respectivamente. Os eixos AB e CD são maciços, com diâmetro  $d$ . determinar: (i) os valores máximo e mínimo da tensão de cisalhamento no eixo BC; (ii) o diâmetro necessário dos eixos AB e CD, tal que as tensões de cisalhamento sejam inferiores a 65 MPa.

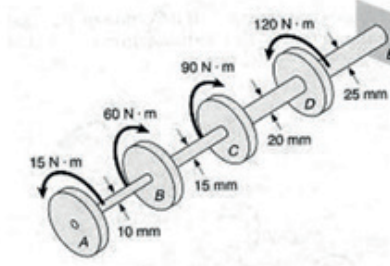


R.: (i) 86,2 MPa; 64,7 MPa; (ii) 77,8 mm

Fonte: BEER *et al*, 2011.

**Figura 07** – Exercício 3

- 3) Sabendo-se que todo o eixo é maciço e tem 120 mm de comprimento, determinar: (i) o máximo valor da tensão de cisalhamento (ii) o ângulo de torção nos trechos AB e AE ( $G=70$  GPa).



R.: (i) 85,9 MPa (CD)

Fonte: BEER *et al.*, 2011.

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a resolução do primeiro exemplo (Figura 06) pode-se apenas determinar o que foi solicitado no item i, visto que a planilha não calcula diâmetro necessário para uma certa tensão máxima. Desse modo, apenas é possível determinar as tensões máximas e mínimas no intervalo BC.

**Figura 08** – Valores digitados na planilha e resultados do exercício 2

Para barras lineares: livres ou engastadas em A; de seção transversal circulares maciça ou vazada; de diâmetros constantes ou variados; apenas cc								
Módulo de Elasticidade transversal do material G (GPa)	Ponto	Torque pontual T (N.m)	T POSITIVO	T NEGATIVO		Observação: Caso o intervalo não seja vazado, digite 0 ou não digite nada para o diâmetro interno.		
	A	-6000				Observação: Caso a barra possuir menos de 7 pontos, digite 0 para os diâmetros externos restantes		
	B	-14000						
	C	26000						
	D	-6000						
	E							
	F							
	G							
Tabela de resultados								
Intervalo	Torque (N.m)	Distancia entre os pontos do intervalo L (m)	Diâmetro externo do intervalo De (m)	Diâmetro interno do intervalo Di (m)	Momento Polar de Inércia J (m <sup>4</sup> )	Tensão máxima de cisalhamento τ(máx) (MPa)	Tensão Mínima de Cisalhamento τ(min) (MPa)	Ângulo de to (Rad)
AB	6000	0,9	0,12	0,09	1,39163E-05	25,8690	19,4017	-
BC	20000	0,7	0,12	0,09	1,39163E-05	86,2300	64,6725	-
CD	-6000	0,5	0,12	0,09	1,39163E-05	25,8690	19,4017	-
DE	0				0			-
FG	0				0			-

Fonte: Elaborada pelo autor.



Como pode-se observar na figura 08, na linha 19 e nas colunas G e H, o resultado encontrado pela planilha para tensão máxima e mínima de cisalhamento, segundo os dados informados, são 86,23 MPa e 64,6725 Mpa respectivamente.

Visto que o resultado na parte inferior da figura 04 é equivalente ao resultado encontrado na planilha, pode-se concluir que a mesma foi eficiente neste exemplo.

Para a resolução do segundo exemplo (Figura 07), visto que a mesma possui letras nomeando os pontos, devemos lembrar que o ponto A deve ser interpretado como o engaste como explicitado anteriormente no 4º parágrafo do item 2.2. Logo, os pontos E, D, C B e A devem ser renomeados para A, B, C, D e E respectivamente.

**Figura 09** – Valores digitados na planilha e resultados do exercício 3

Para barras lineares: livres ou engastadas em A; de seção transversal circulares maciça ou vazada; de diâmetros constantes ou variados; apenas com

Módulo de Elasticidade transversal do material G (GPa): 70

Ponto: A, B, C, D, E, F, G

Torque pontual T (N.m): A: 0, B: -120, C: 90, D: 60, E: -15, F: 0, G: 0

T POSITIVO, T NEGATIVO

Observação: Caso o intervalo não seja variado, digite 0 ou não digite nada para o diâmetro interno.

Se a barra possuir menos de 7 pontos, digite 0 para os diâmetros externos restantes.

Observação: Caso não haja torque no ponto, digite 0 ou não digite nada.

**Tabela de resultados**

Intervalo	Torque (N.m)	Distancia entre os pontos do intervalo l (m)	Diâmetro externo do intervalo De (m)	Diâmetro interno do intervalo Di (m)	Momento Polar de Inércia J (m <sup>4</sup> )	Tensão máxima de cisalhamento τ(máx) (MPa)	Tensão Mínima de Cisalhamento τ(min) (MPa)	Ângulo de torção (Rad)
AB	15	0,03	0,025		3,83495E-08	4,8892	0,0000	0,0002
BC	135	0,03	0,02		1,5708E-08	85,9437	0,0000	0,0037
CD	45	0,03	0,015		4,9701E-09	67,9061	0,0000	0,0039
DE	-15	0,03	0,01		9,81748E-10	76,3944	0,0000	-0,0061
FG	0				0			

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao analisar a figura 09, comparando as tensões máximas de cisalhamento, a maior encontrada foi 85,9437 Mpa no intervalo BC, que é o mesmo intervalo CD da figura 05 onde pode-se observar o resultado no canto inferior esquerdo de 85,9 MPa.

Para o item *ii*, é necessário observar a célula I24 para o trecho AE e a célula I21 para o trecho AB (Trecho DE na planilha) como mostrado na figura 10.

Figura 10 – Valores digitados na planilha e resultados do exercício 3

Planilha para auxílio em problemas de Torção - Excel

Arquivo Página Inicial Inserir Layout da Página Fórmulas Dados Revisão Editar Ajuda Digite-me o que você deseja fazer

134 =SOMA(I18:I22)

Observação: Caso não haja torque no ponto, digite 0 ou não digite nada.

Se a barra possuir menos de 7 pontos, digite 0 para os diâmetros externos restantes

Tabela de resultados									
Intervalo	Torque [N.m]	Distância entre os pontos do intervalo L [m]	Diâmetro externo do intervalo De [m]	Diâmetro interno do intervalo Di [m]	Momento Polar de Inércia J [m <sup>4</sup> ]	Tensão máxima de cisalhamento τ(max) [MPa]	Tensão Mínima de Cisalhamento τ(min) [MPa]	Ângulo de torção φ [Rad]	Deslocamento de se ponto no limite da se transversal do interv δ [mm]
AB	15	0,03	0,025		3,83495E-08	4,8892	0,0000	0,0002	0,0021
BC	135	0,03	0,02		1,5708E-08	85,9437	0,0000	0,0037	0,0368
CD	45	0,03	0,015		4,9701E-09	67,9061	0,0000	0,0039	0,0291
DE	-15	0,03	0,01		9,81748E-10	76,3944	0,0000	-0,0065	-0,0327
FG	0				0				

Ângulo de torção no ponto mais distante do ponto A φ <sub>o</sub> [Rad]	0,0012	Lembre-se: Resultado positivo sentido horário; Resultado negativo sentido anti-horário;
Ângulo de torção no ponto mais distante do ponto A φ <sub>o</sub> [Graus]	0,0678 °	
Deslocamento total num ponto da seção transversal mais distante possível do ponto A (δ)	0,0353 mm	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando os resultados obtidos na planilha (Figura 10), tendo em vista o que foi levado em consideração anteriormente, o ângulo de torção no trecho AE é 0,0012 Rad no sentido horário e no trecho AB é 0,0065 Rad no sentido anti-horário.

## 4 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma planilha desenvolvida para auxiliar os usuários da mesma na resolução de problemas envolvendo torção em barras circulares, podendo obter resultados como tensões de cisalhamento máximas e mínimas, momentos polares de inércia e ângulos de torção ocorrentes na seção transversal da suposta barra quando está submetida a momentos torsores pontuais. Para isso, foram realizados exemplos que já possuíam respostas esperadas, nos quais foi possível observar que, ao inserir os dados corretamente na planilha, os resultados obtidos foram os mesmos que os esperados, demonstrando assim a funcionalidade da ferramenta. Entretanto, vale ressaltar que a planilha se limita a determinar apenas os resultados demonstrados neste artigo e, dessa forma, não pode ser utilizada para resolução de problemas com processo inverso ou para a determinação das dimensões das barras circulares como diâmetro ou comprimento.

Além disso, a ferramenta computacional foi criada numa planilha do software Microsoft Office Excel, que é um programa de fácil acesso, podendo ser utilizada diretamente no navegador da internet ou em computadores que possuam o software instalado.

Por fim, é possível concluir que esta ferramenta atendeu ao propósito que inicialmente pretendia-se chegar, sendo muito útil em atividades que envolvam torção e também possuindo grande acessibilidade.

## REFERÊNCIAS

ASSIS, Wayne Santos de; BITTENCOURT, Túlio Nogueira. **Utilização de recursos multimídia no ensino de concreto armado e protendido**. 2002.

ASSIS, Wayne Santos de. **Sistemas computacionais de apoio à monitoração de estruturas de engenharia civil**. 2007. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

ASSIS, Wayne Santos de; BITTENCOURT, Túlio Nogueira; NORONHA, Marcos Aurélio Marques. **Desenvolvimento de recursos multimídia para o ensino de estruturas de concreto**. Revista Ibracon, v. 11, n. 32, p. 41-51, 2003.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos materiais**. 7ª Edição. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

BEER, F.P. e JOHNSTON, JR., E.R. **Resistência dos Materiais**, 3.º Ed., Makron Books, 1995.

GERE, J. M. **Mecânica dos Materiais**, Editora Thomson Learning, 2003.

BEER, Ferdinand P., JOHNSTON, Russel., DEWOLF, John e MAZUREK, David. **Mecânica dos Materiais**, 5.º Ed., Porto Alegre: AMGH, 2011.

---

**Data do recebimento:** 22 de julho de 2020

**Data da avaliação:** 12 de setembro de 2020

**Data de aceite:** 12 de setembro de 2020

---

---

1 Acadêmico do Curso de Engenharia Civil do Centro Universitário Tiradentes – UNIT/AL.

E-mail: lucas\_pll@hotmail.com

2 Professor do Curso de Engenharia Civil do Centro Universitário Tiradentes – UNIT/AL.

E-mail: jonas.rafael@souunit.com.br

3 Professora do Curso de Engenharia Civil do Centro Universitário Tiradentes – UNIT/AL.

E-mail: brunacamerinolira@gmail.com